سلسلة الامتياز

في

الرياضيات

للصف الثالث الإعدادي
الفصل الدراسي الثاني

إعداد

الأستاذ/وليد محمد عكاشة

ت : ٠١٠٠٢٠٩٧٨٦٦

الوحدة الأولى

الدرس الأول

حل معادلتين فى متغيرين من الدرجة الأولى جبرياً

◄ لحل معادلتين فى متغيرين من الدرجة الأولى تستخدم طريقة الحذف

مثال 1 أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية جبرياً :-

1 س + ص = ٧ ، س - ص = ٣

الحل

س + ص = ٧ ← ①

س - ص = ٣ ← ②

بالجمع

٢س = ١٠ ، س = ١٠/٢

س = ٥ بالتعويض فى 1

٥ + ص = ٧ ، -٥

ص = ٢

∴ م.ح = {(٥ ، ٢)}

2 ٢س + ص = ٠ ، س + ص = ١

الحل

٢س + ص = ٠ ← ①

س + ص = ١ ← ②

بالطرح

س = -١ بالتعويض فى ②

-١ + ص = ١

ص = ١ + ١ ⇐ ص = ٢

∴ م.ح = {(-١ ، ٢)}

3 س - ص = ٤ ، س + ٢ص = ١٣

الحل

س - ص = ٤ ← ① (×٢)

س + ٢ص = ١٣ ← ②

بضرب المعادلة الأولى (×٢)

٢س - ٢ص = ٨

س + ٢ص = ١٣

بالجمع

٣س = ٢١ ⇐ س = ٢١/٣

س = ٧ بالتعويض فى ②

٧ + ٢ص = ١٣

٢ص = ١٣ - ٧

٢ص/٢ = ٦/٢ ، ص = ٣

∴ م.ح = {(٧ ، ٣)}

4 ٢س + ٥ص = -٥ ، ٥س - ٢ص = ٣١

الحل

٢س + ٥ص = -٥ ← ① ×②

٥س - ٢ص = ٣١ ← ② ×⑤

بضرب المعادلة الأولى ×② والثانية ×⑤

٤س + ١٠ص = -١٠

٢٥س - ١٠ص = ١٥٥

بالجمع

٢٩س/٢٩ = ١٤٥/٢٩

س = ٥ بالتعويض فى ①

(٢×٥) + ٥ص = -٥ - ١٠

٥ص = -١٥ ⇐ ص = -١٥/٥

∴ ص = -٣

∴ م.ح = {(٥ ، -٣)}

⑤ ٢س + ص = ١٠ ، ص = ٣س

الحل

٢س + ص = ١٠ ← ①

٣س − ص = ٠ ← ②

بالجمع

٥س = ١٠ ⇐ س = ١٠/٥

∴ [س = ٢] بالتعويض في ①

٢×٢ + ص = ١٠

ص = ١٠ − ٤ = ٦

[ص = ٦]

∴ م.ح = {(٢، ٦)}

⑥ ٢س = ٩ − ٥ص ، ٣س − ص − ٥ = ٠

الحل

٢س + ٥ص = ٩ ← ①

٣س − ص = ٥ ← ②

ترتيب المعادلتين أولاً

بضرب المعادلة ② × ⑤

٢س + ~~٥ص~~ = ٩

١٥س − ~~٥ص~~ = ٢٥

بالجمع

١٧س = ٣٤ ⇐ س = ٣٤/١٧

∴ [س = ٢] بالتعويض في ①

٢×٢ + ٥ص = ٩

٥ص = ٩ − ٤

٥ص = ٥ ⇐ ص = ٥/٥

[ص = ١]

∴ م.ح = {(٢، ١)}

⑦ س = ٥ − ص ، ٢س + ٢ص = ٣

الحل

س + ص = ٥ ← ①

٢س + ٢ص = ٣ ← ②

بضرب المعادلة ① × (−٢)

−~~٢س~~ − ~~٢ص~~ = −١٠

~~٢س~~ + ~~٢ص~~ = ٣

بالجمع

صفر ≠ −٧

∵ س، ص تم حذفهم وتبقى الأعداد

∴ المستقيمان متوازيان

∴ م.ح = ∅

⑧ ٢س = ٨ − ٤ص ، س + ٢ص = ٤

الحل

٢س + ٤ص = ٨ ← ①

س + ٢ص = ٤ ← ②

بضرب المعادلة ② × (−٢)

~~٢س~~ + ~~٤ص~~ = ~~٨~~

−~~٢س~~ − ~~٤ص~~ = −~~٨~~

بالجمع

كله إتحذف ∴ المستقيمان منطبقان

∴ م.ح = عدد لانهائي من الحلول

وأحد هذه الحلول هو

نشتغل على أي معادلة فيهم وليكن الثانية

س + ٢ص = ٤

بوضع [س = ٠]

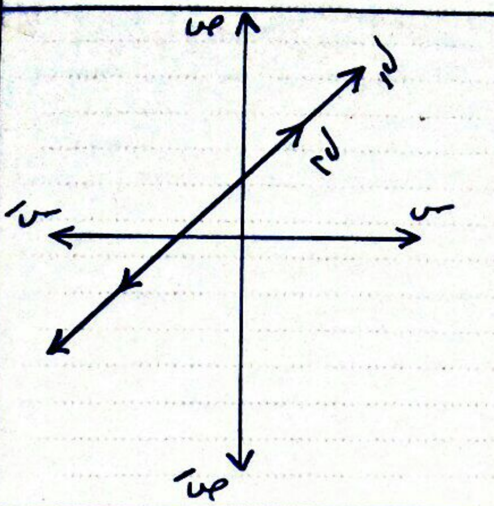
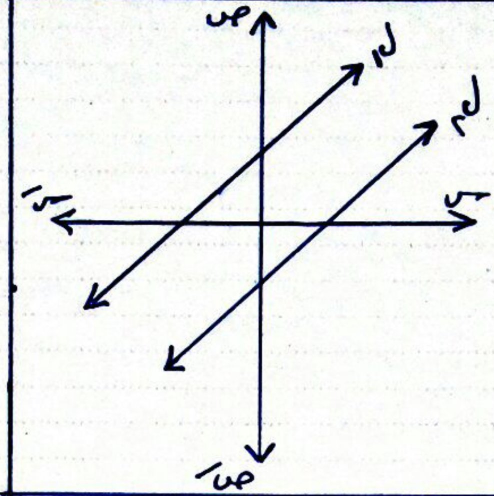
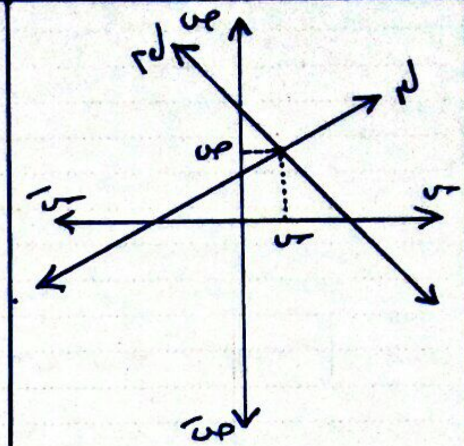
∴ ٠ + ٢ص = ٤ ⇐ ٢ص = ٤

ص = ٤/٢ ← [ص = ٢]

∴ أحد الحلول هي {(٠، ٢)}

⇐ لاحظ أن معادلة واحدة من الدرجة الأولى في متغيرين لها عدد لانهائي من الحلول لذلك فإن المستقيمان المتطابقان يعتبروا معادلة واحدة.

الدرس الثانى [حل معادلتين الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً]

منطبقان	متوازيان	متقاطعان
		
م.ح = عدد لانهائى من الحلول عدد الحلول هو عدد لانهائى	م.ح = ∅ عدد الحلول = صفر	م.ح = {(س ، ص)} عدد الحلول = حل وحيد

[بحث نوع الخطين دون رسمهما]

إذا كان ل١ : أ س + ب ص = جـ ، ل٢ : هـ س + و ص = د

إذا كان	إذا كان	إذا كان
أ/هـ ≠ ب/و	أ/هـ = ب/و ≠ جـ/د	أ/هـ = ب/و = جـ/د
كان المستقيمان متقاطعان م.ح = {(س ، ص)} حل وحيد (عدد الحلول)	كان المستقيمان متوازيان م.ح = ∅ عدد الحلول = صفر	كان المستقيمان منطبقان ويكون عدد الحلول عدد لانهائى وأحد هذه الحلول هو {(س ، ص)}

مثال ① بين نوع الخطين

٢س + ٣ص = ١ ، ٤س + ٦ص = ٢

٢/٤ = ١/٢ ، ٣/٦ = ١/٢ ، ١/٢

∴ أ/هـ = ب/و = جـ/د

∴ المستقيمان منطبقان

مثال ② إذا كان ٥س + ل ص = ٣ ، ١٠س + ٦ص = ٥ متوازيان أوجد قيمة ل

∵ المستقيمان متوازيان ∴ ٥/١٠ = ل/٦

ل = (٥ × ٦)/١٠ = ٣٠/١٠ = ٣

∴ $\boxed{\text{ل} = ٣}$

[٣] أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

① ص = ٣س − ١ ، س − ص + ١ = ٠

الحل

ص = ٣س − ١

س	٠	١	٢
ص	−١	٢	٥

ص = ٣ × ٠ − ١ = −١

ص = ٣ × ١ − ١ = ٢

ص = ٣ × ٢ − ١ = ٥

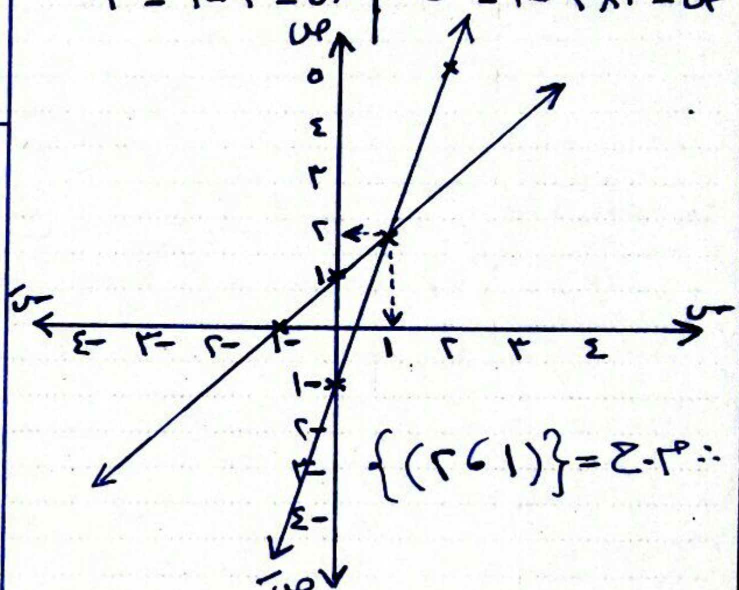
س = ص − ١

س	−١	٠	١
ص	٠	١	٢

س = ٠ − ١ = −١

س = ١ − ١ = ٠

س = ٢ − ١ = ١



∴ م.ح = {(١ ، ٢)}

② ٣س + ص = ٣ ، ٢ص + ٦س = ١٢

الحل

ص = ٣ − ٣س

س	٠	١	٢
ص	٣	٠	−٣

ص = ٣ − ٣ × ٠ = ٣

ص = ٣ − ٣ × ١ = ٠

ص = ٣ − ٣ × ٢ = −٣

٢ص = ١٢ − ٦س

بالقسمة على ٢

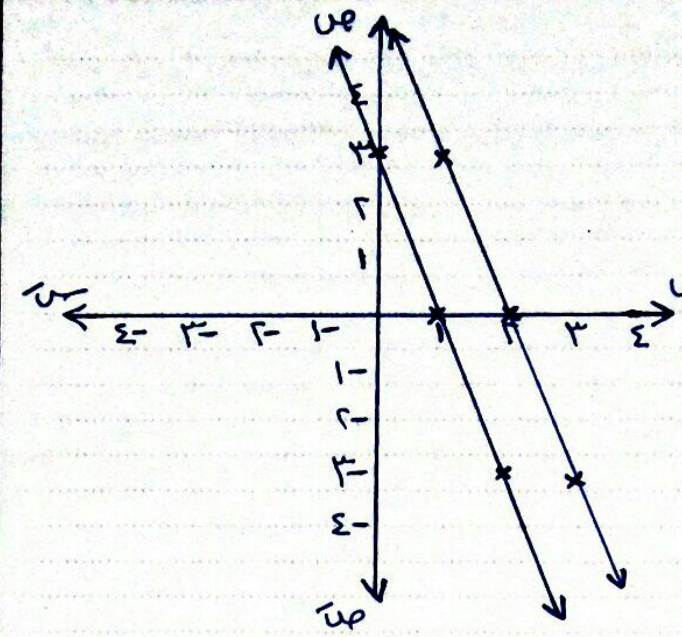
ص = ٦ − ٣س

س	١	٢	٣
ص	٣	٠	−٣

ص = ٦ − ٣ × ١ = ٣

ص = ٦ − ٣ × ٢ = ٠

ص = ٦ − ٣ × ٣ = −٣



∴ المستقيمان متوازيان

∴ م.ح = φ

[٣] ٣س + ٢ص = ٦ ، ص = ٣ − $\frac{3}{2}$ س

$\frac{\text{٣س}}{\text{٣}} = \frac{\text{٦ − ٢ص}}{\text{٣}}$

س = $\frac{\text{٦ − ٢ص}}{\text{٣}}$

س	٢	٠	٤
ص	٠	٣	−٣

س = $\frac{\text{٦ − ٢ × ٠}}{\text{٣}}$ = ٢

س = $\frac{\text{٦ − ٢ × ٣}}{\text{٣}}$ = ٠

س = $\frac{\text{٦ − ٢ × −٣}}{\text{٣}}$ = ٤

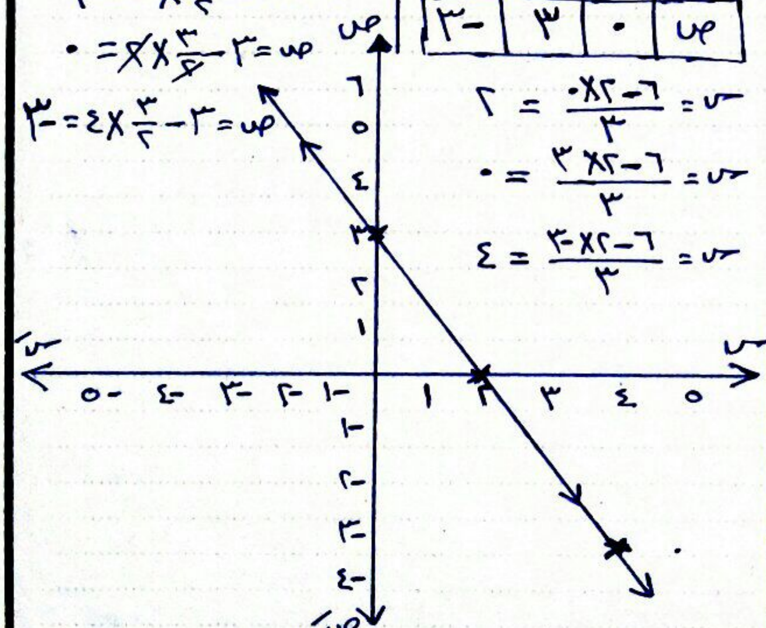
ص = ٣ − $\frac{3}{2}$ س

س	٠	٢	٤
ص	٣	٠	−٣

ص = ٣ − $\frac{3}{2}$ × ٠ = ٣

ص = ٣ − $\frac{3}{2}$ × ٢ = ٠

ص = ٣ − $\frac{3}{2}$ × ٤ = −٣



∴ المستقيمان منطبقان

∴ م.ح عدد لا نهائي من الحلول

أحد هذه الحلول هي = {(٢ ، ٠)}

الدرس الثالث

تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيريـــن

عددان ← س ، ص

مجموعهم ← س + ص

الفرق بينهم ← س − ص

محيط المستطيل ← س + ص = ½ المحيط

يزيد ← (−)

أضيف ← (+)

ضعف الأول ← ٢س

ثلاثة أمثاله ← ٣س وهكذا

زاويتان متتامتان ← س + ص = ٩٠°

زاويتان متكاملتان ← س + ص = ١٨٠°

١ عددان نسبيان مجموعهم ٦٣ والفرق بينهم ١٢ أوجد العددين .

الحل نفرض أن العددان هما س ، ص

س + ص = ٦٣ ← ١

س − ص = ١٢ ← ٢

بالجمع

٢س = ٧٥ ، س = ٧٥/٢

س = ٣٧٫٥

بالتعويض فى ١

٣٧٫٥ + ص = ٦٣

ص = ٦٣ − ٣٧٫٥

ص = ٥١/٢ = ٢٥٫٥

∴ العددان هما ٧٥/٢ ، ٥١/٢

٢ عددان إذا أضيف ثلاثة أمثال العدد الأول إلى ضعف العدد الثانى كان الناتج ١٩ وإذا أضيف العدد الأول إلى ثلاثة أمثال العدد الثانى كان الناتج ١٦ فما العددان

الحل نفرض أن العدد الأول س ، الثانى ص

٣س + ٢ص = ١٩ ، س + ٣ص = ١٦

بضرب المعادلة ٢ × (−٣)

~~٣س~~ + ٢ص = ١٩

~~−٣س~~ − ٩ص = −٤٨

−٧ص = −٢٩

ص = ٢٩/٧

بالتعويض فى ٢

س + ٣ × ٢٩/٧ = ١٦

س = ١٦ − ٨٧/٧

س = ٢٥/٧

∴ العددان هما ٢٩/٧ ، ٢٥/٧

٣ مستطيل طوله يزيد عن ضعف عرضه بمقدار ١ ومحيطه ٢٠ سم أوجد كلاً من بعديه ومساحته .

الحل

نفرض أن الطول س سم ، العرض ص سم

س − ٢ص = ١ ← ١

س + ص = ١٠ ← ٢ (×٢)

س − ~~٢ص~~ = ١

٢س + ~~٢ص~~ = ٢٠

بالجمع

٣س = ٢١

س = ٧

بالتعويض فى ٢

٧ + ص = ١٠

ص = ١٠ − ٧

ص = ٣

∴ الطول = ٧ سم ، العرض = ٣ سم

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٧ × ٣ = ٢١ سم²

٤ زاويتان متكاملتان ضعف قياس أكبرهما يساوي سبعة أمثال قياس الصغرى أوجد قياس كل زاوية .

نفرض أن قياس الصغرى س° ، الكبرى ص

س + ص = ١٨٠ ، ٢ص = ٧س

س + ص = ١٨٠ ← ① × ٢

٧س − ٢ص = ٠ ← ②

بضرب المعادلة ① × ٢

٢س + ~~٢ص~~ = ٣٦٠°

٧س − ~~٢ص~~ = ٠

بالجمع

٩س = ٣٦٠° ⇐ س = ٣٦٠ / ٩

$\boxed{\text{س = ٤٠°}}$ بالتعويض في ①

٤٠ + ص = ١٨٠

ص = ١٨٠ − ٤٠

$\boxed{\text{ص = ١٤٠°}}$

∴ قياس الزاوية الصغرى = ٤٠° والكبرى ١٤٠°

٥ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠° أوجد قياس كل منهما

الحل

نفرض أن الزاويتان هما س ، ص

س + ~~ص~~ = ٩٠ ← ①

س − ~~ص~~ = ٥٠ ← ②

بالجمع

٢س = ١٤٠ ⇐ س = ١٤٠ / ٢

$\boxed{\text{س = ٧٠°}}$ بالتعويض في ①

٧٠ + ص = ٩٠ ⇐ ص = ٩٠° − ٧٠°

$\boxed{\text{ص = ٢٠°}}$

∴ الزاويتين هما ٧٠° ، ٢٠°

٦ عدد مكون من رقمين ورقم آحاده ضعف رقم عشراته ، وإذا عكس وضع الرقمين كان العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلي بمقدار ٣٦ أوجد العدد الأصلي .

الحل نفرض أن رقم الآحاد هو س

رقم العشرات هو ص

س = ٢ص ← ①

العدد الأصلي (س + ١٠ص)

وإذا عكس وضع الرقمين يكون الناتج (ص + ١٠س)

وإذا كان الناتج يزيد عن الأصلي بمقدار ٣٦

(ص + ١٠س) − (س + ١٠ص) = ٣٦

٩س − ٩ص = ٣٦ بالقسمة على ٩

س − ص = ٤ ← ②

بضرب المعادلة ② × −٢

س − ~~٢ص~~ = ٠

−٢س + ~~٢ص~~ = −٨

بالجمع

−س = −٨ $\boxed{\text{س = ٨}}$

بالتعويض في ①

٢ص = ٨ ⇐ ص = ٨ / ٢

∴ $\boxed{\text{ص = ٤}}$

∴ العدد الأصلي هو $\boxed{\text{٤٨}}$

دعاء المذاكرة

اللهم إني أسألك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين ، اللهم أجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على ما تشاء قدير وحسبنا الله ونعم الوكيل

تمارين (١)

١ أكمل ما يأتي

١) مجموعة حل المعادلتين س + ص = ٠ ، ص - ٥ = ٠ في ح × ح هي ....

٢) إذا كان المستقيمان س + ٣ص = ٤ ، س + أص = ٧ متوازيان فإن أ = ...

٣) المستقيمان الممثلان للمعادلتين س + ٣ = ٠ ، ص = ٥ يتقاطعان في النقطة ....

٤) نقطة تقاطع المستقيمين س + ٧ = ٠ ، ص - ١ = ٠ تقع في الربع ....

٥) مجموعة حل المعادلتين ٤س + ص = ٦ ، ٢ص = ١٢ - ٨س في ح × ح هي ......

٦) إذا كان للمعادلتين س + ٢ص = ١ ، س + أص = ٢ حل وحيد فإن أ لا يمكن أن تساوي ....

٧) مجموعة حل المعادلتين س + ٣ص = ٤ ، ٣ص = ١ - س في ح × ح هي ......

٨) المستقيمان ٣س + ٥ص = ٠ ، ٥س - ٢ص = ٠ يتقاطعان في ....

٢ أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية بيانياً:

١) س + ص = ٤ ، ٢س - ص = ٢

٢) س = ٣ ، ٣س - ٥ص = ١

٣) ٢س = ٧ - ص ، ٤س + ٢ص = ٣

٤) ٣ص = ٦ ، س + ٦ص = ١٢

٥) س - ٣ص = ٦ ، ٢س - ٦ص = ١٢

٣ أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية جبرياً:

١) ص = ٢س - ١ ، س + ٢ص = ٨

٢) س + ص = ١ ، ص = ٢س + ٤

٣) س + ٣ص = ١١ ، ص - ٣س + ١٣ = ٠

٤) ٣س + ٥ص = ١١ ، ٥س + ٣ص = ١٣

٥) س + ٧ص = ٢٢ ، ٤س + ٣ص = ١٣

٦) ص - ٢ = ٠ ، ٣س + ص = ٧

٧) ٥ص = ٢س + ١ ، س - ٢ص = ١

٤ أوجد قيمة أ ، ب إذا كانت

أس + ب ص = ٥ ، ٣أ س + ب ص = ١٧ علماً بأن (٣ ، -١) حل للمعادلتين

٥ عددان مجموعهم ٣ والفرق بينهم -٧ أوجد العددين

٦ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣سم فإذا كان ضعف طوله ينقص عن أربعة أمثال عرضه بمقدار ٢سم ، أوجد بعدي المستطيل ومساحته.

٧ زاويتان متتامتان قياس إحداهما يزيد عن خمسة أمثال قياس الأخرى بمقدار ٣٠° أوجد قياس كل زاوية

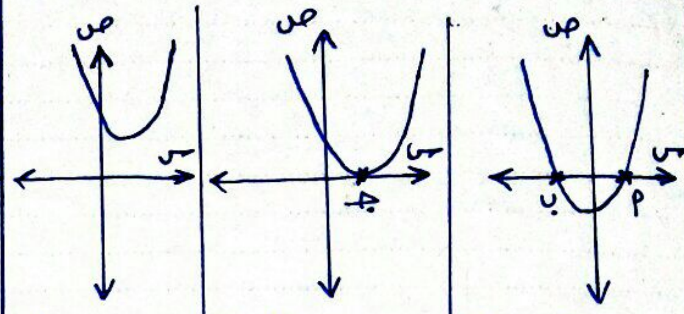
٨ منذ ٦ سنوات كان عمر رجل ستة أمثال عمر ابنه وبعد عشر سنوات يكون عمر الرجل ضعف عمر ابنه فما عمر كل منهما الآن

٩ عدد مكون من رقمين مجموعهما ٥ وإذا تغير وضع الرقمين فإن العدد الناتج ينقص عن العدد الأصلي بمقدار ٩ فما هو العدد الأصلي.

أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

الدرس الرابع :-

حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جبرياً وبيانياً

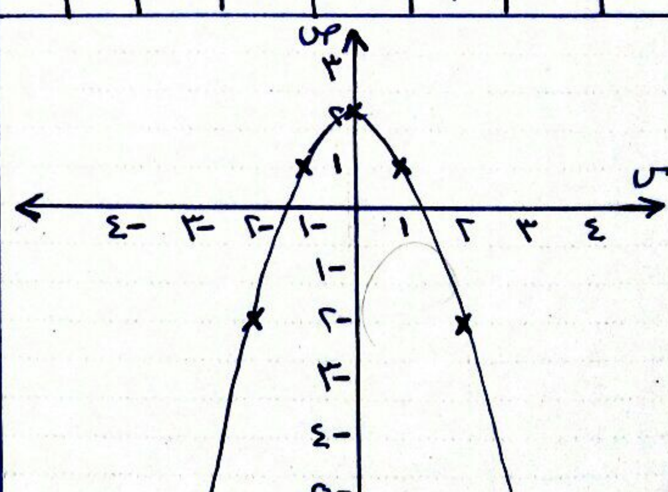


م.ح = {أ ، ب}   م.ح = {جـ}   م.ح = ϕ

مثال ① مثل بيانياً د(س) = ٢ - س² متخذاً س ∈ [-٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد إحداثي رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى ومجموعة حل المعادلة د(س) = صفر

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٧	-٢	١	٢	١	-٢	-٧



رأس المنحنى = (٠ ، ٢)

معادلة محور التماثل هي $\boxed{س = ٠}$

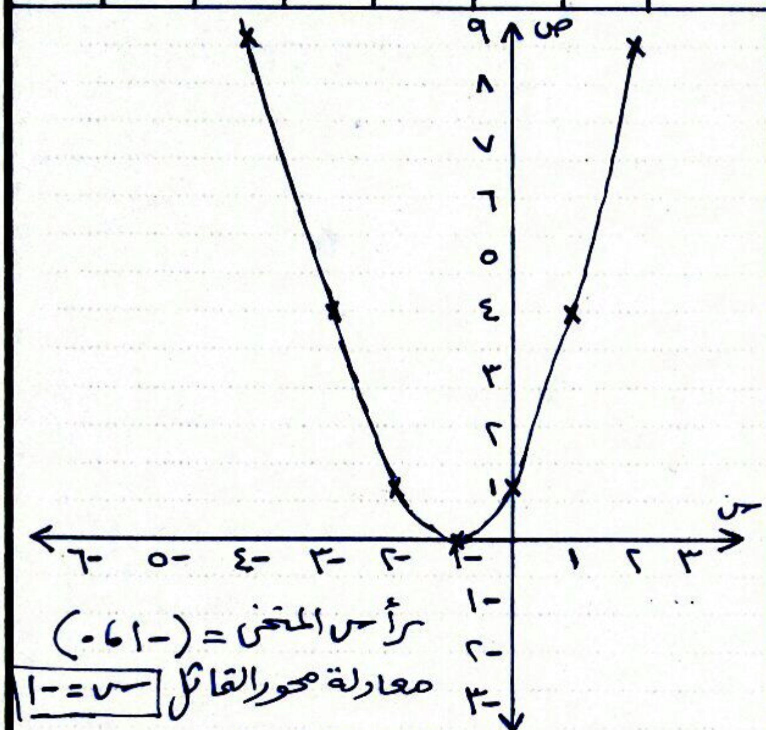
القيمة العظمى = ٢

م.ح = {-١،٤ ، ١،٤}

مثال ② د(س) = س² + ٢س + ١ متخذاً س ∈ [-٤ ، ٢]

الحل

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



رأس المنحنى = (-١ ، ٠)

معادلة محور التماثل $\boxed{س = -١}$

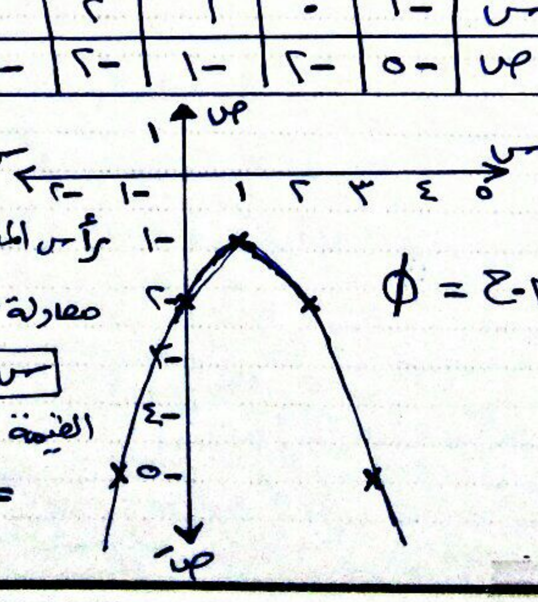
القيمة الصغرى = صفر

م.ح = {-١}

مثال ③ د(س) = ٢س - ٢ - س² حيث س ∈ [-١ ، ٣]

الحل

س	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٥	-٢	-١	-٢	-٥



رأس المنحنى = (١ ، -١)

م.ح = ϕ

معادلة محور التماثل $\boxed{س = ١}$

القيمة العظمى = -١

الحل الجبرى

[التحليل - القانون العام]

مثال ① حل جبرياً $س^٢ + ٧س = ٨$

باستخدام التحليل $س^٢ + ٧س - ٨ = ٠$

$\therefore (س + ٨)(س - ١) = ٠$

$\boxed{س = -٨}$ ، $\boxed{س = ١}$

$\therefore م.ح = \{-٨ ، ١\}$

ملحوظة: بعض المعادلات يصعب تحليلها لذلك نلجأ للقانون العام

* القانون العام

$أس^٢ + ب س + جـ = صفر$

$$\boxed{س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}}$$

مثال ② أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية فى ح

① $س^٢ - ٤س = -٢$ حيث $\sqrt{٢} = ١٫٤١$

الحل $س^٢ - ٤س + ٢ = ٠$

$\boxed{أ = ١}$ ، $\boxed{ب = -٤}$ ، $\boxed{جـ = ٢}$

$$س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٢}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢}$$

$$س = \frac{٤ \pm ٢ \times ١٫٤١}{٢} = \frac{٤ \pm ٢٫٨}{٢}$$

$س_١ = \frac{٤ + ٢٫٨}{٢}$ | $س_٢ = \frac{٤ - ٢٫٨}{٢}$

$\boxed{س_١ = ٣٫٤}$ | $\boxed{س_٢ = ٠٫٦}$

$\therefore م.ح = \{٣٫٤ ، ٠٫٦\}$

مثال ⑤ أوجد مجموعة حل المعادلة $٣س^٢ = ٥س - ١$ مقرباً الناتج لرقمين عشريين

الحل

$\therefore ٣س^٢ - ٥س + ١ = ٠$

$\boxed{أ = ٣}$ $\boxed{ب = -٥}$ $\boxed{جـ = ١}$

$$س = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٣} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$$

$س_١ = \frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٦}$ | $س_٢ = \frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٦}$

$\boxed{س_١ = ١٫٤٣}$ | $\boxed{س_٢ = ٠٫٢٣}$

$\therefore م.ح = \{١٫٤٣ ، ٠٫٢٣\}$

مثال ③ $س(س - ١) = ٤$ الحل

نضرب س × القوس أولاً ونصفر المعادلة

$س^٢ - س - ٤ = صفر$

$\boxed{أ = ١}$ $\boxed{ب = -١}$ $\boxed{جـ = -٤}$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١} = \frac{١ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$$

$س_١ = \frac{١ + \sqrt{١٧}}{٢}$ | $س_٢ = \frac{١ - \sqrt{١٧}}{٢}$

$\boxed{س_١ = ٢٫٥٦}$ | $\boxed{س_٢ = -١٫٥٦}$

$\therefore م.ح = \{٢٫٥٦ ، -١٫٥٦\}$

④ $(س - ٣)^٢ - ٥س = صفر$

الحل نفك القوس أولاً

$س^٢ - ٦س + ٩ - ٥س = صفر$

$س^٢ - ١١س + ٩ = صفر$

$\boxed{أ = ١}$ ، $\boxed{ب = -١١}$ ، $\boxed{جـ = ٩}$

$$س = \frac{١١ \pm \sqrt{١٢١ - ٤ \times ١ \times ٩}}{٢ \times ١} = \frac{١١ \pm \sqrt{٨٥}}{٢}$$

$س_١ = \frac{١١ - \sqrt{٨٥}}{٢}$ | $س_٢ = \frac{١١ + \sqrt{٨٥}}{٢}$

$\boxed{س_١ = ٠٫٨٩}$ | $\boxed{س_٢ = ١٠٫١}$

$\therefore م.ح = \{٠٫٨٩ ، ١٠٫١\}$

⑤ س + ٤/س = ٦ الحل

بضرب المعادلة × س

س × س + ٤/س × س = ٦ × س

س² + ٤ = ٦س

س² − ٦س + ٤ = صفر

أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٤

س = (٦ ± √(٣٦ − ٤ × ١ × ٤)) / (٢ × ١) = (٦ ± ٢√٥) / ٢

س١ = (٦ + ٢√٥) / ٢ | س٢ = (٦ − ٢√٥) / ٢

س١ = ٥و٢ | س٢ = ٠و٧٦

⑥ ٨/س² + ١/س = ١ الحل

بضرب المعادلة × س²

٨/س² × س² + ١/س × س² = ١ × س²

٨ + س = س²

س² − س − ٨ = صفر

أ = ١ ، ب = −١ ، جـ = −٨

س = (١ ± √(١ − ٤ × ١ × −٨)) / (٢ × ١) = (١ ± √٣٣) / ٢

س١ = (١ + √٣٣) / ٢ | س٢ = (١ − √٣٣) / ٢

س١ = ٣و٣٧ | س٢ = −٢و٣٧

∴ م.ح = {٣و٣٧ ، −٢و٣٧}

⑦ س/٣ = ١/(٥ − س) الحل

بضرب مقص

٥س − س² = ٣

س² − ٥س + ٣ = ٠

أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٣

س = (٥ ± √(٢٥ − ٤ × ١ × ٣)) / (٢ × ١) = (٥ ± √١٣) / ٢

س١ = (٥ + √١٣) / ٢ | س٢ = (٥ − √١٣) / ٢

س١ = ٤و٣ | س٢ = ٠و٦٩٧

∴ م.ح = {٤و٣ ، ٠و٦٩٧}

تمارين (٢)

١ ارسم الشكل البياني للدالة د في الفترة المعطاة ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ مقرباً الناتج لرقم عشري واحد في كل مما يأتي

أ د(س) = س² − ٢س − ٤ ، س ∈ [−٢ ، ٤]

ب د(س) = ٢س² + ٥س ، س ∈ [−٤ ، ٢]

ج د(س) = ٣س − س² + ٢ ، س ∈ [−١ ، ٤]

د د(س) = س(س − ٥) + ٣ ، س ∈ [٠ ، ٥]

هـ د(س) = س² − ٣ ، س ∈ [−٣ ، ٣]

٢ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية باستخدام القانون العام

أ س² − ٢س − ٤ = ٠ حيث √٥ ≃ ٢و٢٤

ب س² = ٢(س + ٦) ~~حيث √٥٢ ≃ ٧و٢~~

ج س² − ٢(س + ٣) = ٠

د ١ − ٢/س = ٢/س²

هـ ٩س² − ٢٤س + ١٦ = ٠

و س + ٧/س + ١ = ٠

ز (س − ٣)² + ١ = ٠

٣ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = ٤ − س² حيث س ∈ [−٣ ، ٣]

ومن الرسم أوجد أ رأس المنحنى

ب القيمة العظمى أو الصغرى للدالة د

جـ معادلة محور التماثل د جذري المعادلة س² = ٤

(الدرس الخامس)

حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

لحل المعادلتين

① نفصل المعادلة من الدرجة الأولى
② نختصر المعادلة من الدرجة الثانية
⇐ نعوض في ② من ①
⇐ نفك القوس ونجمع المتشابهة
⇐ نحلل ونوجد قيم المتغير الأول
⇐ نعوض في ① ونوجد قيم المتغير الثاني
⇐ نكتب م.ح

مثال ① أوجد مجموعة حل كلاً من المعادلات الآتية

① $س + ص = ٤$ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

الحل

$س = ٤ - ص \longrightarrow ①$

$س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ = ٠ \longrightarrow ②$

بالتعويض في ②

$(٤ - ص)^{٢} + ص^{٢} - ١٠ = ٠$

$١٦ + ص^{٢} - ٨ص + ص^{٢} - ١٠ = ٠$

$\frac{٢ص^{٢}}{٢} - \frac{٨ص}{٢} + \frac{٦}{٢} = \frac{صفر}{٢}$

$ص^{٢} - ٤ص + ٣ = صفر$

$(ص - ١)(ص - ٣) = ٠$

$\boxed{ص = ١}$ | $\boxed{ص = ٣}$

بالتعويض في ①

$س = ٤ - ١$ | $س = ٤ - ٣$

$\boxed{س = ٣}$ | $\boxed{س = ١}$

$\therefore$ م.ح $= \{(٣ ، ١) ، (١ ، ٣)\}$

② $س - ٢ص = ٥$ ، $س ص + ٣ = ٠$

الحل

$س = ٥ + ٢ص \longrightarrow ①$

$س ص + ٣ = ٠ \longrightarrow ②$

بالتعويض في ②

$(٥ + ٢ص) ص + ٣ = ٠$

$٢ص^{٢} + ٥ص + ٣ = ٠$

$(٢ص + ٣)$ ، $(ص + ١)$ ، $٢ص + ٣ص = ٥ص$

$(٢ص + ٣)(ص + ١) = ٠$

$\boxed{ص = \frac{-٣}{٢}}$ | $\boxed{ص = -١}$

بالتعويض في ①

$س = ٥ + ٢ \times \frac{-٣}{٢}$ | $س = ٥ + ٢ \times -١$

$س = ٥ - ٣$ | $س = ٥ - ٢$

$\boxed{س = ٢}$ | $\boxed{س = ٣}$

$\therefore$ م.ح $= \{(٢ ، \frac{-٣}{٢}) ، (٣ ، -١)\}$

③ $ص - س = ٢$ ، $س^{٢} + س ص - ٤ = ٠$

الحل

$ص = ٢ + س \longrightarrow ①$

$س^{٢} + س ص - ٤ = ٠ \longrightarrow ②$

بالتعويض في ②

$س^{٢} + س(٢ + س) - ٤ = ٠$

$س^{٢} + ٢س + س^{٢} - ٤ = ٠$

$\frac{٢س^{٢}}{٢} + \frac{٢س}{٢} - \frac{٤}{٢} = ٠$

$س^{٢} + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$\boxed{س = -٢}$ | $\boxed{س = ١}$

بالتعويض في ①

$ص = ٢ + (-٢)$ | $ص = ٢ + ١$

$\boxed{ص = ٠}$ | $\boxed{ص = ٣}$

$\therefore$ م.ح $= \{(-٢ ، ٠) ، (١ ، ٣)\}$

٤ $س + ١ = ٠$ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ١٧$

الحل

$س + ١ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = -١}$

بالتعويض في ②

$(-١)^{٢} + ص^{٢} = ١٧$

$١ + ص^{٢} = ١٧ \Leftarrow ص^{٢} = ١٧ - ١$

$\sqrt{ص^{٢}} = \sqrt{١٦}$

$\boxed{ص = \pm ٤}$

$\therefore$ م.ح $= \{(١- ، ٤) ، (١- ، ٤-)\}$

٥ $س - ص = ٠$ ، $س ص = ١$

الحل

$س = ص$

$\boxed{س = ص}$ بالتعويض في ②

$س \times س = ١ \Leftarrow \sqrt{س^{٢}} = \sqrt{١}$

$\boxed{س = \pm ١}$ $\therefore س = ص$

$\therefore \boxed{ص = \pm ١}$

$\therefore$ م.ح $= \{(١ ، ١) ، (١- ، ١-)\}$

٦ $س + ص = ٠$ ، $٢س^{٢} - ص^{٢} = ٤$

الحل

$س = -ص \leftarrow ①$

بالتعويض في ②

$٢(-ص)^{٢} - ص^{٢} = ٤$

$٢ص^{٢} - ص^{٢} = ٤ \Leftarrow \sqrt{ص^{٢}} = \sqrt{٤}$

$\boxed{ص = \pm ٢}$ $\therefore \boxed{س = \mp ٢}$

$\therefore$ م.ح $= \{(٢ ، ٢-) ، (٢- ، ٢)\}$

٥ $س - ٢ص = ٠$ ، $س^{٢} - ص^{٢} = ٣$

الحل

$س = ٢ص \leftarrow ①$

$س^{٢} - ص^{٢} - ٣ = ٠ \leftarrow ②$

بالتعويض في ②

$(٢ص)^{٢} - ص^{٢} - ٣ = ٠$

$٤ص^{٢} - ص^{٢} - ٣ = ٠$

$٣ص^{٢} - ٣ = ٠$ نقسم على ③

$ص^{٢} - ١ = ٠$

$(ص - ١)(ص + ١) = ٠$

$\boxed{ص = ١}$ | $\boxed{ص = -١}$ بالتعويض في ①

$س = ٢ \times ١$ | $س = ٢ \times -١$

$\boxed{س = ٢}$ | $\boxed{س = -٢}$

$\therefore$ م.ح $= \{(٢ ، ١) ، (٢- ، ١-)\}$

٦ $ص + ٢س = ٧$ ، $٢س^{٢} + س + ٣ص = ١٩$

الحل

$ص = ٧ - ٢س \leftarrow ①$

$٢س^{٢} + س + ٣ص - ١٩ = ٠ \leftarrow ②$

بالتعويض في ②

$٢س^{٢} + س + ٣(٧ - ٢س) - ١٩ = ٠$

$٢س^{٢} + س + ٢١ - ٦س - ١٩ = ٠$

$٢س^{٢} - ٥س + ٢ = ٠$ ($٢س$ ، $١-$) ، ($س$ ، $٢-$)

$(٢س - ١)(س - ٢) = ٠$

$\boxed{س = \frac{١}{٢}}$ | $\boxed{س = ٢}$ $٤س + س = ٥س$

بالتعويض في ①

$ص = ٧ - ٢ \times \frac{١}{٢}$ | $ص = ٧ - ٢ \times ٢ = ٧ - ٤$

$\boxed{ص = ٦}$ | $\boxed{ص = ٣}$

$\therefore$ م.ح $= \{(\frac{١}{٢} ، ٦) ، (٢ ، ٣)\}$

لاحظ س ، ص عددان

- مجموع مربعيهما ← $س^{٢} + ص^{٢}$
- الفرق بين مربعيهما ← $س^{٢} - ص^{٢}$
- حاصل ضربهما ← $س ص$
- مساحة المستطيل ← $س ص$
- قطر المستطيل ← $س^{٢} + ص^{٢}$ = مربع القطر
- وتر المثلث القائم ← $س^{٢} + ص^{٢}$ = مربع الوتر
- مربع مجموعهما ← $(س + ص)^{٢}$
- مربع الفرق بينهم ← $(س - ص)^{٢}$
- قطر المعين وطول ضلعه ← $س^{٢} + ص^{٢} = ٤ \times (\text{الضلع})^{٢}$

حيث س ، ص طول قطرية

٧ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم وصاحته ٢٨ سم^2 أوجد محيطه . **الحل**

نفرض أن الطول س سم ، العرض ص سم

س − ص = ٣ ، س ص = ٢٨

س = ٣ + ص ← ①

س ص − ٢٨ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

(٣ + ص) ص − ٢٨ = ٠

ص^2 + ٣ص − ٢٨ = ٠

(ص − ٤)(ص + ٧) = ٠

$\boxed{\text{ص = ٤}}$ | $\boxed{\text{ص = −٧}}$ مرفوض ×

بالتعويض في ①

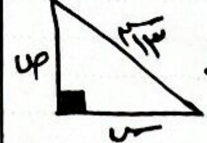
س = ٣ + ٤ $\boxed{\text{س = ٧}}$

∴ الطول = ٧ سم ، العرض = ٤ سم

∴ المحيط = (الطول + العرض) × ٢

= (٧ + ٤) × ٢ = ٢٢ سم

٨ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوي ٣٠ سم أوجد طول ضلعي القائمة .



نفرض أن طول ضلعي القائمة هما س سم ، ص سم

∴ س^2 + ص^2 = ١٦٩ ، من فيثاغورث

∴ س + ص + ١٣ = ٣٠ من المحيط

س + ص = ٣٠ − ١٣ $\boxed{\text{س + ص = ١٧}}$

س = ١٧ − ص ← ①

س^2 + ص^2 − ١٦٩ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

(١٧ − ص)^2 + ص^2 − ١٦٩ = ٠

٢٨٩ − ٣٤ص + ص^2 + ص^2 − ١٦٩ = ٠

٢ص^2/٢ − ٣٤ص/٢ + ١٢٠/٢ = ٠/٢

ص^2 − ١٧ص + ٦٠ = ٠

(ص − ١٢)(ص − ٥) = ٠

$\boxed{\text{ص = ١٢}}$ | $\boxed{\text{ص = ٥}}$

بالتعويض في ①

س = ١٧ − ١٢ | س = ١٧ − ٥

$\boxed{\text{س = ٥}}$ | $\boxed{\text{س = ١٢}}$

∴ ضلعي القائمة هما ٥ سم ، ١٢ سم #

٩ مجموع عددين صحيحين هو ٩ والفرق بين مربعيهما ٢٧ . أوجد العددين . **الحل**

نفرض أن العددان هما س ، ص

س + ص = ٩ ، س^2 − ص^2 = ٢٧

س = ٩ − ص ← ①

س^2 − ص^2 − ٢٧ = ٠ ← ② بالتعويض في ②

(٩ − ص)^2 − ص^2 − ٢٧ = ٠

٨١ + $\cancel{\text{ص}^2}$ − ١٨ص − $\cancel{\text{ص}^2}$ − ٢٧ = ٠

−١٨ص + ٥٤ = ٠

−١٨ص/−١٨ = −٥٤/−١٨ ⇐ $\boxed{\text{ص = ٣}}$

بالتعويض في ①

س = ٩ − ٣ ⇐ $\boxed{\text{س = ٦}}$

∴ العددان هما ٦ ، ٣

١٠ مستطيل طول قطره ٥ سم ومحيطه ١٤ سم أوجد بعديه **الحل**

نفرض أن بعديه هما س ، ص

س + ص = ٧ ← ① من المحيط

س^2 + ص^2 = ٢٥ ← ② من القطر

س = ٧ − ص ← ①

س^2 + ص^2 − ٢٥ = ٠ ← ② بالتعويض في ②

(٧ − ص)^2 + ص^2 − ٢٥ = ٠

٤٩ − ١٤ص + ص^2 + ص^2 − ٢٥ = ٠

٢ص^2/٢ − ١٤ص/٢ + ٢٤/٢ = ٠/٢

ص^2 − ٧ص + ١٢ = ٠

(ص − ٣)(ص − ٤) = ٠

$\boxed{\text{ص = ٣}}$ | $\boxed{\text{ص = ٤}}$ بالتعويض في ①

س = ٧ − ٣ | س = ٧ − ٤

$\boxed{\text{س = ٤}}$ | $\boxed{\text{س = ٣}}$

∴ بعديه هما ٤ سم ، ٣ سم

ملحوظة البعدين هما (الطول ، العرض)

تمارين (٣)

١ أكمل ما يأتي:

(١) المعادلة س ص = ٣ من الدرجة ....

(٢) مجموعة حل المعادلتين س = ١ ، س ص = ١ هي ....

(٣) مجموعة حل المعادلتين س = ١ ، س² + ص² = ١ هي ....

(٤) مجموعة حل المعادلتين س = ٢ ، س ص = ٦ هي ....

(٥) مجموعة حل المعادلتين س = ص ، س ص = ١ هي ....

(٦) مجموعة حل المعادلتين س − ص = ٠ ، س ص = ٩ هي ....

(٧) عددان موجبان مجموعهما ٧ ، حاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما ....

(٨) إذا كان أ ب = ٣ ، أ ب² = ١٢ فإن ب تساوي ....

٢ أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية في ح×ح

(١) س − ص = ١ ، س² + ص² = ٢٥

(٢) ص − س = ٢ ، س² + س ص − ٤ = ٠

(٣) س − ٢ ص − ١ = ٠ ، س² − س ص = ٠

(٤) س + ص = ٥ ، س ص = ٦

٣ عددان صحيحان مجموعهما ٧ ومجموع مربعيهما ٢٥ أوجد العددين

٤ مستطيل محيطه ٢٤ سم ومساحته ٣٥ سم² أوجد طول بعديه

٥ معين الفرق بين طولي قطريه ٤ سم ، محيطه يساوي ٤٠ سم أوجد طول كل من قطريه

٦ عددان أحدهما معكوس جمعي للآخر ومجموع مربعيهما هو ٢ أوجد العددين

٧ عددان الفرق بينهما ٥ وحاصل ضربهما ٣٦ أوجد العددين

اختبار على الوحدة الأولى

١ أكمل ما يأتي

(١) إذا كان المستقيمان ٣ س + ٥ ص = ٤ ، أ س + ١٠ ص = ٣ متوازيان فإن أ = ...

(٢) مجموعة حل المعادلتين ص − ٤ = ٣ ، س − ١ = ٠ في ح هي ....

(٣) مجموعة حل المعادلة س³ + ٤ س = ٠ في ح هي ....

(٤) مجموعة الحل للمعادلتين س − ص = ٠ ، س ص = ٤ في ح×ح هي ....

(٥) منحنى الدالة د(س) = س² − ٥ س يقطع محور السينات في النقطتين ....

(٦) مجموعة حل المعادلتين س + ٣ ص = ٤ ، ٣ ص + [illegible] س = ١ في ح×ح هي ....

٢ (أ) أوجد جبرياً مجموعة حل المعادلتين في ح×ح

٢ س − ص = ٣ ، س + ٢ ص = ٤

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

س² − س = ٨

٣ (أ) أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين

س − ص = ٤ ، س² + ص² = ٢٦

(ب) ارسم الشكل البياني للدالة

د(س) = س² − ٢ س + ١ في الفترة [−٢ ، ٤]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س² − ٢ س + ١ = ٠

٤ (أ) أوجد بيانياً مجموعة حل المعادلتين

ص − ٥ = ٠ ، س + ص = ٣

(ب) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم ومحيطه ١٦ سم أوجد كلاً من بعديه ومساحته

(الوحدة الثانية)

الدرس الأول [أصفار الدالة]

أصفار الدالة: هي قيم س التي تجعل الدالة تساوي صفر

فمثلاً $د(س) = س - 2$ قيمتها تساوي صفر عند $\boxed{س = 2}$

∴ نقول أن الدالة أصفارها $ص(د) = \{2\}$

خطوات حساب أصفار الدالة

1. نساوي الدالة بالصفر
2. نحلل ونوجد قيم س
3. نكتب ص(د)

ملحوظة إذا كانت الدالة كسرية (بسط ومقام)

نحسب أصفار البسط لوحدها ونحسب أصفار المقام لوحدها ثم نحسب {أصفار البسط} − {أصفار المقام}

← يعني اللي موجود في البسط وغير موجود في المقام

ملحوظة ← أي دالة لا تحلل مثل مجموع المربعين $(س^2 + \text{عدد})$ أصفارها ϕ

← أي دالة ثابتة أصفارها ϕ

ماعدا $د(س) = \text{صفر}$ أصفارها ح

مثال ١: احسب أصفار كلاً من الدوال الآتية:

① $د(س) = (س-1)(س-2)$ **الحل**

$(س-1)(س-2) = 0$ متحللة جاهزة

$\boxed{س = 1}$ | $\boxed{س = 2}$ ∴ $ص(د) = \{1 ، 2\}$

② $د(س) = س^2 - 16$ **الحل**

$س^2 - 16 = 0 \qquad (س-4)(س+4) = 0$

$\boxed{س = 4}$ ، $\boxed{س = -4}$

∴ $ص(د) = \{4 ، -4\}$

③ $د(س) = س^2 - 2س$ **الحل**

$س^2 - 2س = 0$

$س(س - 2) = 0$

$\boxed{س = 0}$ | $\boxed{س = 2}$

∴ $ص(د) = \{0 ، 2\}$

④ $د(س) = -7$ ثابتة أصفارها ϕ

⑤ $د(س) = س^2 + 9$ لا تحلل أصفارها ϕ

⑥ $د(س) = \text{صفر}$ أصفارها ح

⑦ $د(س) = \dfrac{2س^3 - 18س}{س^2 + 2س - 3}$ **الحل**

$\dfrac{2س^3}{2} - \dfrac{18س}{2} = \dfrac{0}{2}$

$س^3 - 9س = 0$

$س(س^2 - 9) = 0$

$س(س-3)(س+3) = 0$

$\boxed{س = 0}$ | $\boxed{س = 3}$ | $\boxed{س = -3}$

أصفار البسط $= \{0 ، 3 ، -3\}$

$س^2 + 2س - 3 = 0$

$(س+3)(س-1) = 0$

$\boxed{س = -3}$ | $\boxed{س = 1}$

∴ أصفار المقام $= \{-3 ، 1\}$

∴ $ص(د) = \{0 ، 3\}$

⑧ $د(س) = 6س^2 + س - 12$ **الحل**

$6س^2 + س - 12 = 0$

$(2س \;\; + \;\; 3)$

$(3س \;\; - \;\; 4)$

$9س - 8س = س$

$(2س+3)(3س-4) = 0$

$\boxed{س = \frac{-3}{2}}$ | $\boxed{س = \frac{4}{3}}$

∴ $ص(د) = \{\frac{-3}{2} ، \frac{4}{3}\}$

وإذا غامرت في شرف مروم ∴
∴ فلا ترضى بما دون النجوم

[9] د(س) = $س^4 + 125س$

الحل
$س^4 + 125س = 0$

$س(س^3 + 125) = 0$

$س(س + 5)(س^2 - 5س + 25) = 0$

$\boxed{س = 0}$ | $\boxed{س = -5}$ | ϕ

$\therefore$ ص(د) = {0 ، −5}

مثال [2] إذا كانت {−3 ، 3} هي مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^2 + أ$ فأوجد قيمة أ

الحل
نعوض عن قيم س مرة (−3) ومرة (3) ونساوي الناتج بالصفر

$(-3)^2 + أ = 0 \Leftarrow \boxed{أ = -9}$

$(3)^2 + أ = 0 \Leftarrow \boxed{أ = -9}$

$\therefore$ قيمة $\boxed{أ = -9}$

مثال [3] إذا كانت أصفار الدالة د حيث د(س) = $أس^2 + ب س + 15$ هي {3 ، 5} أوجد قيمة كل من أ ، ب

الحل

عند $\boxed{س = 3}$

$أ \times (3)^2 + ب \times 3 + 15 = 0$

$9أ + 3ب + 15 = 0 \longleftarrow (1)$

$أ \times (5)^2 + ب \times 5 + 15 = 0$

$25أ + 5ب + 15 = 0 \longleftarrow (2)$

نضرب (1) × 5 ونضرب (2) × −3

$45أ + \cancel{15ب} + 75 = 0$

$-75أ - \cancel{15ب} - 45 = 0$ بالجمع

$-30أ + 30 = 0$

$\frac{\cancel{-30}أ}{\cancel{-30}} = \frac{-30}{-30}$ $\boxed{أ = 1}$ بالتعويض في (1)

لنحصل على قيمة ب

$9 \times 1 + 3ب + 15 = 0 \Leftarrow \cancel{3}ب = \frac{-24}{3}$

$\boxed{ب = -8}$

الدرس الثاني [مجال الدالة]

مجال الدالة هو قيم س التي تجعل الدالة معرفة فمثلاً د(س) = $\frac{3}{س - 1}$ يكون لها الناتج عند التعويض عن س بأي عدد ماعدا $\boxed{س = 1}$ لأنه $\frac{3}{1 - 1} = \frac{3}{0}$ = غير معرفة

⟸ فنقول أننا يمكن أن نعوض عن س بأي عدد ماعدا $\boxed{س = 1}$

فنقول أن مجال الدالة هو ح − {1}

⟸ أي مجموعة التعويض هي جميع الأعداد ماعدا {1}

⟸ **مجال الدالة الكسرية = ح − {أصفار المقام}**

⟸ **ملاحظات هامة**

⟸ الدالة التي ليس لها مقام مجالها ح

⟸ الدالة التي مقامها عدد ثابت مجالها ح

⟸ الدالة التي مقامها لا يحلل مجالها ح

⟸ عند حساب المجال نشتغل على المقام فقط

خطوات المجال

1. نساوي المقام بالصفر
2. نحلل ونوجد قيم س
3. المجال = ح − {قيم س}

⟸ المجال المشترك = ح − {كله بدون تكرار}

مثال [1] أوجد مجال كلاً مما يأتي

[1] هـ(س) = $\frac{س + 3}{2}$ مجالها ح ← عدد ثابت

[2] هـ(س) = $\frac{س^2 - 1}{س^2 + 1}$ مجالها ح ← لا يحلل

[3] هـ(س) = $5س^3 - 25$ مجالها ح (ليس لها مقام)

[4] هـ(س) = $\frac{س - 2}{2س}$ مجالها ح − {0}

$\frac{\cancel{2}س}{\cancel{2}} = \frac{0}{2} \Leftarrow \boxed{س = 0}$

٥ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{2} + 1}{\text{س}^{2} - \text{س}}$ **الحل**

$\text{س}^{2} - \text{س} = 0$

$\text{س}(\text{س} - 1) = 0$

$\boxed{\text{س} = 0}$ | $\boxed{\text{س} = 1}$

∴ $\text{المجال} = \text{ح} - \{0 ، 1\}$

مثال ٢ أوجد المجال المشترك لكل من

① $\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س}}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{2}{\text{س} + 1}$

الحل

$\text{س} = 0$ ، $\text{المجال} = \text{ح} - \{0\}$ | $\text{س} + 1 = 0$ ، $\boxed{\text{س} = -1}$ ، $\text{المجال} = \text{ح} - \{-1\}$

∴ $\text{المجال المشترك} = \text{ح} - \{0 ، -1\}$

② $\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{3}{\text{س}^{2} - \text{س}}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{2\text{س} - 3}{\text{س}^{2} - 1}$

الحل

$\text{س}^{2} - \text{س} = 0$ | $\text{س}^{2} - 1 = 0$

$\text{س}(\text{س} - 1) = 0$ | $(\text{س} - 1)(\text{س} + 1) = 0$

$\boxed{\text{س} = 0}$ | $\boxed{\text{س} = 1}$ | $\boxed{\text{س} = 1}$ | $\boxed{\text{س} = -1}$

$\text{المجال} = \text{ح} - \{0 ، 1\}$ | $\text{المجال} = \text{ح} - \{1 ، -1\}$

∴ $\text{المجال المشترك} = \text{ح} - \{0 ، 1 ، -1\}$

③ $\dfrac{4\text{س} - 3}{\text{س}^{2} - \text{س}}$ ، $\dfrac{\text{س} - 1}{\text{س}^{2} + 16}$ ، $\dfrac{5\text{س}}{\text{س}^{2} - 2\text{س} - 3}$

الحل

$\text{س}^{2} - \text{س} = 0$ $\text{س}(\text{س} - 1) = 0$

$\boxed{\text{س} = 0}$ ، $\boxed{\text{س} = 1}$ مجال $\text{د}_1 = \text{ح} - \{0 ، 1\}$

$\text{س}^{2} + 16 = 0$ لا نحلل مجال $\text{د}_2 = \text{ح}$

$\text{س}^{2} - 2\text{س} - 3 = 0$ $(\text{س} - 3)(\text{س} + 1) = 0$

$\boxed{\text{س} = 3}$ ، $\boxed{\text{س} = -1}$ مجال $\text{د}_3 = \text{ح} - \{3 ، -1\}$

∴ $\text{المجال المشترك} = \text{ح} - \{0 ، 1 ، 3 ، -1\}$

مثال ٣ إذا كان مجال الدالة د :

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - 1}{\text{س}^{2} - \text{أ}\text{س} + 9}$ هو $\text{ح} - \{3\}$

فأوجد قيمة أ **الحل**

∴ مجال الدالة هو $\text{ح} - \{3\}$

نعوض في المقام عن $\boxed{\text{س} = 3}$ ونساويه بالصفر

$(3)^{2} - \text{أ} \times 3 + 9 = 0$

$9 - 3\text{أ} + 9 = 0$

$\cancel{-3}\,\text{أ} = -18$ ⇐ $\text{أ} = \dfrac{-18}{-3}$ ⇐ $\boxed{\text{أ} = 6}$ #

الدرس الثالث [إختزال الكسر الجبري]

← خطوات إختزال الكسر الجبري

١ نحلل البسط والمقام تحليلاً تاماً إن أمكن

٢ نكتب المجال = ح − {أصفار المقام}

٣ نختصر العوامل المتشابهة ونكتب الناتج في أبسط صورة

ملحوظة إذا كان $\boxed{\text{د}_1 = \text{د}_2}$

فإن مجال د_1 = مجال د_2

$\text{د}_1(\text{س}) = \text{د}_2(\text{س})$ بعد الإختصار

← لجميع قيم س التي تنتمي للمجال المشترك

أي أننا سنأخذ المجال المشترك

أي لا يشترط أن يكون $\boxed{\text{مجال د}_1 = \text{مجال د}_2}$

مثال ١ إختصر مايأتي في أبسط صورة

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{2} - 4}{\text{س}^{3} - 8}$ **الحل**

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س} + 2)}{\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س}^{2} + 2\text{س} + 4)}$

$\text{المجال} = \text{ح} - \{2\}$

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + 2}{\text{س}^{2} + 2\text{س} + 4}$

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{2\text{س}^{2} + 7\text{س} + 6}{4\text{س}^{2} + 4\text{س} - 3}$ **الحل**

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\cancel{(2\text{س} + 3)}(\text{س} + 2)}{\cancel{(2\text{س} + 3)}(2\text{س} - 1)}$

$\text{المجال} = \text{ح} - \{\frac{1}{2} ، \frac{-3}{2}\}$ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + 2}{2\text{س} - 1}$

أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

مثال ② إثبت أن ن١ = ن٢ حيث

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{2\text{س}}{2\text{س}+8} \quad ، \quad \text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+4\text{س}}{\text{س}^2+8\text{س}+16}$$

الحل

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\cancel{2}\text{س}}{\cancel{2}(\text{س}+4)} =$$

المجال = ح − {−4}

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+4}$$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}\cancel{(\text{س}+4)}}{(\text{س}+4)\cancel{(\text{س}+4)}}$$

المجال = ح − {−4}

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+4}$$

∵ مجال ن١ = مجال ن٢

ن١(س) = ن٢(س) بعد الاختصار

$\boxed{∴ \text{ن}_1 = \text{ن}_2}$

مثال ③ إثبت أن ن١ = ن٢ حيث

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^3-1}{\text{س}^3+\text{س}^2+\text{س}} \quad ، \quad \text{ن}_2(\text{س}) = \frac{(\text{س}-1)(\text{س}^2+1)}{\text{س}^3+\text{س}}$$

الحل

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{(\text{س}-1)\cancel{(\text{س}^2+\text{س}+1)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}^2+\text{س}+1)}}$$

المجال = ح − {0}

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}-1}{\text{س}}$$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{(\text{س}-1)\cancel{(\text{س}^2+1)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}^2+1)}}$$

المجال = ح − {0}

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}-1}{\text{س}}$$

∵ مجال ن١ = مجال ن٢

ن١(س) = ن٢(س) بعد الاختصار

$\boxed{∴ \text{ن}_1 = \text{ن}_2}$

علمتني الرياضيات :-

(إن لكل مجهول قيمة فلا تحتقر أحد لا تعرفه)

تمارين (4)

[1] أكمل ما يأتي

① مجموعة أصفار الدالة د(س) = −3س هي ....

② إذا كانت ص(د) = {2} حيث د(س) = س³ − ل فإن ل = ...

③ مجموعة أصفار الدالة س³ + س² = 0 هي ....

④ مجال الدالة د(س) = صفر هو ......

⑤ أصفار الدالة د(س) = صفر هو ....

⑥ مجال الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{\text{س}^2-9}$ هو ....

⑦ أصفار الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{\text{س}^2-9}$ هي ....

⑧ مجال الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{2}$ هو ....

⑨ مجال الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{\text{س}^2+1}$ هو ....

⑩ إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{2}$ فإن ص(د) = ...

[2] أوجد المجال المشترك لكل من الكسور الآتية

[1] $\frac{\text{س}-2}{\text{س}+4}$ ، $\frac{7}{\text{س}-3}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{س}^2+4}$

[2] $\frac{\text{س}^2-4}{\text{س}^2-5\text{س}+6}$ ، $\frac{7}{\text{س}^2-9}$ ، س^2-5

[3] $\frac{1}{2\text{س}}$ ، $\frac{\text{س}-1}{5}$

[3] إثبت أن ن١ = ن٢ في كلاً مما يأتي

① $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+4}{\text{س}^3+4\text{س}}$

② $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{3\text{س}}{3\text{س}+12}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+4\text{س}}{\text{س}^2+8\text{س}+16}$

[4] إثبت أن لجميع قيم س التي تنتمي إلى المجال المشترك ن١(س) = ن٢(س) حيث

① $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+2\text{س}}{\text{س}^2-4}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2-\text{س}}{\text{س}^2-3\text{س}+2}$

[5] إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-2}{\text{س}^2-\text{س}-6}$ فأوجد

مجال $\text{ن}^{-1}(\text{س})$

الدرس الرابع

العمليات على الكسور الجبرية

[الجمع - الطرح - الضرب - القسمة]

* **خطوات الحل :-**

1 نحلل بسط ومقام الكسرين تحليلاً تاماً إن أمكن

2 نكتب المجال = ح - {أصفار المقام}

← في حالة القسمة عند إيجاد المجال

المجال = ح - {أصفار مقام الأول وأصفار بسط ومقام الكسر الثاني}

3 نختصر العوامل المتشابهه

← في الجمع والطرح نختزل كل كسر على حدى

← في الضرب نختصر المتشابهة من أي الكسرين

4 نجري العملية الموجودة إذا كانت جمع أو طرح أو ضرب

5 نبسط ونكتب الناتج

ملحوظة هامة في مسألة القسمه

يجب أولاً أن نحول القسمة لضرب باستخدام قاعدة [ثبت] [إضرب] [شقلب]

ثم نكمل حل المسألة مثل الخطوات السابقة

مثال 1 أوجد هـ(س) في أبسط صورة مبينا مجال هـ

1 $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^2+2\text{س}} + \frac{\text{س}-2}{\text{س}^2-4}$ ثم أوجد هـ(-2) إن أمكن

الحل

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}(\text{س}+2)} + \frac{\cancel{\text{س}-2}}{\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}+2)}$$

المجال = ح - {0 ، -2 ، 2}

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}+2} + \frac{1}{\text{س}+2} = \frac{2}{\text{س}+2}$$

∵ -2 ∉ لمجال الدالة

∴ هـ(-2) غير ممكنة (غير معرفة)

2 $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{\text{س}^2-7\text{س}+12} - \frac{4}{\text{س}^2-4\text{س}}$ الحل

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\cancel{\text{س}-3}}{\cancel{(\text{س}-3)}(\text{س}-4)} - \frac{4}{\text{س}(\text{س}-4)}$$

المجال = ح - {3 ، 4 ، 0}

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}-4} - \frac{4}{\text{س}(\text{س}-4)}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\cancel{\text{س}-4}}{\text{س}\cancel{(\text{س}-4)}} = \frac{1}{\text{س}}$$

3 $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2-3\text{س}+2}{\text{س}^2-1} \div \frac{3\text{س}-15}{\text{س}^2-4\text{س}-5}$

الحل

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2-3\text{س}+2}{\text{س}^2-1} \times \frac{\text{س}^2-4\text{س}-5}{3\text{س}-15}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\cancel{(\text{س}-1)}(\text{س}-2)}{\cancel{(\text{س}+1)}\cancel{(\text{س}-1)}} \times \frac{\cancel{(\text{س}-5)}\cancel{(\text{س}+1)}}{3\cancel{(\text{س}-5)}}$$

المجال = ح - {1 ، -1 ، 5}

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}-2}{3}$$

4 $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2-12\text{س}+36}{\text{س}^2-6\text{س}} \times \frac{4\text{س}+24}{36-\text{س}^2}$

الحل

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\cancel{(\text{س}-6)}\cancel{(\text{س}-6)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}-6)}} \times \frac{4\cancel{(\text{س}+6)}}{-\cancel{(\text{س}-6)}\cancel{(\text{س}+6)}}$$

المجال = ح - {0 ، 6 ، -6}

$$\therefore \text{هـ}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}} \times \frac{4}{-1}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{-4}{\text{س}}$$

لا يكف المرء عن الحلم حين يصبح عجوزاً بل يصبح عجوزاً حين يكف عن الحلم ......

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-6}{2\text{س}^2-15\text{س}+18} + \frac{\text{س}-5}{15-13\text{س}+2\text{س}^2}$

$\boxed{\text{الحل}}$ $2\text{س}^2-13\text{س}+15$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\cancel{\text{س}-6}}{(2\text{س}-3)\cancel{(\text{س}-6)}} + \frac{\cancel{\text{س}-5}}{(2\text{س}-3)\cancel{(\text{س}-5)}}$

المجال $= \text{ح} - \{\frac{3}{2}, 6, 5\}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{2\text{س}-3} + \frac{1}{2\text{س}-3}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{2}{2\text{س}-3}$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{\text{س}^2-7\text{س}+12} - \frac{\text{س}-3}{3-\text{س}}$

$\boxed{\text{الحل}}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\cancel{\text{س}-3}}{\cancel{(\text{س}-3)}(\text{س}-4)} + \frac{\cancel{\text{س}-3}}{\cancel{\text{س}-3}}$

المجال $= \text{ح} - \{3, 4\}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}-4} + \frac{1}{1} = \frac{1+\text{س}-4}{\text{س}-4}$

توحيد مقامات

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-3}{\text{س}-4}$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{4} + \frac{-2}{\text{س}+2}$ الحل

المجال $= \text{ح} - \{-2\}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{4} + \frac{-2}{\text{س}+2} = \frac{\text{س}^2+2\text{س}-8}{4(\text{س}+2)}$

توحيد المقامات

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+2\text{س}-8}{4(\text{س}+2)}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-2)(\text{س}+4)}{4(\text{س}+2)}$

مثال ⑤ إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2-2\text{س}}{(\text{س}-2)(\text{س}^2+2)}$

① اختصر $\text{د}^{-1}(\text{س})$ وعين المجال

② إذا كان $\text{د}^{-1}(\text{س}) = 3$ فما قيمة س ؟

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}-2)}{(\text{س}-2)(\text{س}^2+2)}$

الحل: $\text{د}^{-1}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^2+2)\cancel{(\text{س}-2)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}-2)}}$

المجال $= \text{ح} - \{0, 2\}$

لاحظنا هنا المجال من فوق وتحت طالما شقلبنا الدالة

$\text{د}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2+2}{\text{س}}$

إذا كانت $\text{د}^{-1}(\text{س}) = 3$

$\therefore \frac{\text{س}^2+2}{\text{س}} = \frac{3}{1}$

$\text{س}^2+2 = 3\text{س}$

$\text{س}^2-3\text{س}+2 = 0$

$(\text{س}-2)(\text{س}-1) = 0$

$\boxed{\text{س}=2}$ | $\boxed{\text{س}=1}$

مثال ③ إذا كان مجال الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{ب}}{\text{س}} + \frac{9}{\text{س}+\text{أ}}$ هو $\text{ح} - \{0, 4\}$ ، $\text{د}(5) = 2$ أوجد قيمتي أ ، ب

$\boxed{\text{الحل}}$ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{ب}}{\text{س}} + \frac{9}{\text{س}+\text{أ}}$

المجال $= \text{ح} - \{0, -\text{أ}\}$

$\therefore -\text{أ} = 4 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -4}$

$\because \text{د}(5) = 2$

$\therefore \frac{\text{ب}}{5} + \frac{9}{5-4} = 2$

$\frac{\text{ب}}{5} + 9 = 2 - 9$

$\frac{\text{ب}}{5} = \frac{-7}{1}$

$\boxed{\text{ب} = -35}$ #

تمارين (٥)

١ أكمل ما يأتي

١ مجموعة أصفار الدالة $د(س) = (س - ٥)^{٢}$ هي ....

٢ مجال الدالة $د(س) = \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} - ٢س - ٣}$ هو ....

٣ المجال المشترك للدالتين $د_{١}(س) = \frac{س + ١}{س}$ ، $د_{٢}(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ هو ....

٤ أبسط صورة للكسر $\frac{٢س + ٦}{س + ٣}$ هو ....

٥ إذا كان $ن(س) = \frac{س + ٣}{س - ٢}$ فإن مجال $ن^{-١}(س)$ هو ....

٦ $ن(س) = \frac{س}{س - ١} + \frac{-١}{س - ١} = ...$ في أبسط صورة

٧ مجال المعكوس الجمعي للكسر $\frac{س + ٥}{س - ١}$ هو ....

٨ مجال المعكوس الضربي للكسر $\frac{س + ٥}{س - ١}$ هو ....

٩ إذا كانت $ن(س) = \frac{س + ٣}{س - ١}$ فإن $ن(٢) = ...$ ، $ن(-٣) = ...$ ، $ن(١) = ...$

١٠ أبسط صورة للدالة $ن(س) = \frac{س}{س - ٣} \div \frac{٣س}{س^{٢} - ٩}$ هي ....

١١ مجموعة أصفار الدالة $د(س) = \frac{س - ٣}{س + ٢}$ هي ....

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال.

١) $ن(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ٣س + ٢} \div \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} + ٢س}$

٢) $ن(س) = \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} - ١} + \frac{س - ٥}{س^{٢} - ٦س + ٥}$

٣) $ن(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - ٢س + ١} \times \frac{٢س - ٢}{س^{٢} + س + ١}$

٤) $ن(س) = \frac{٣س^{٢} - ٦س}{س^{٢} - ٤} \times \frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س^{٢} + س}$

٥) $ن(س) = \frac{س + ٣}{(س - ٢)(س + ٧)} \div \frac{س^{٢} + ٣س}{٢س + ١٤}$

٦) $ن(س) = \frac{٣س}{س^{٢} - ٢س} - \frac{١٢}{س^{٢} - ٤}$

٧) $ن(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٧س + ١٢} - \frac{س - ٣}{٣ - س}$

٨) $ن(س) = \frac{٢س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢}$

٩) $ن(س) = \frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١} - \frac{س + ٥}{س^{٢} + ٦س + ٥}$

[اختبار على الوحدة الثانية]

١ أكمل ما يأتي :

١) $ن(س) = \frac{س - ٣}{س}$ فإن مجال $ن^{-١}(س)$ هو ....

٢) إذا كان $\frac{س - أ}{س - ٣}$ معكوس الضربي $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن أ = ...

٣) المعكوس الجمعي للكسر $\frac{س - ١}{س + ٥}$ هو ....

٤) إذا كان $ص(د) = \{٢\}$ ، $د(س) = س - م$ فإن م = ...

٥) المجال المشترك للكسرين $\frac{٢}{س - ٣}$ ، $\frac{٧}{س - ٦}$ هو ....

٦) أبسط صورة للكسر الجبري $\frac{٥ - س}{س - ٥}$ هو ....

٢

(أ) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال
$ن(س) = \frac{س^{٢} - ٤٩}{س^{٣} - ٨} \div \frac{س + ٧}{س - ٢}$ واحسب قيمة ن(١) ، ن(-٧) إن أمكن

(ب) أوجد المجال المشترك الذي يتساوى فيه الكسرين
$ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} + س - ١٢}{س^{٢} + ٥س + ٤}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{س^{٢} + ٢س + ١}$

٣

(أ) إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢}}{س^{٣} - س^{٢}}$ ،
$ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} + س^{٢} + س}{س^{٤} - س}$ اثبت أن $ن_{١} = ن_{٢}$

(ب) أوجد $ن^{-١}(س)$ في أبسط صورة مبيناً مجالها
حيث $ن(س) = \frac{٢س - ٦}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ ثم أوجد
ن(١) ، ن(٣) إن أمكن وإذا كان
$ن^{-١}(س) = ٥$ أوجد قيمة س

٤

(أ) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال
$ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} - ٤} + \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + ٥س + ٦}$

(ب) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال
$ن(س) = \frac{س + ١}{س^{٢} - س - ٢} \times \frac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{٣س^{٢} + ١٦س + ٥}$

الوحدة الثالثة [الاحتمال]

التجربة العشوائية: هي تجربة نعرف جميع نواتجها مسبقاً ولكن لا نستطيع تحديد أي من النواتج هو الذي سيظهر

فضاء العينة (ف): هو جميع النواتج للتجربة العشوائية

الحدث (أ) هو الناتج الذي سيظهر وهو جزء من فضاء العينة

لحساب الاحتمال

ل(أ) = ن(أ) / ن(ف) = عدد عناصر الحدث / العدد الكلي

احتمال الحدث المستحيل = صفر

احتمال الحدث المؤكد = $1 = 100\%$

صفر $\leq$ ل(أ) ≤ 1

مثال ① صندوق يحتوي على 12 كرة منها 5 كرات زرقاء، 4 كرات حمراء، وباقي الكرات بيضاء سحبت كرة عشوائياً أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة

أ) زرقاء = $\frac{5}{12} = 0.416$

ب) ليست حمراء = $\frac{5+3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

جـ) زرقاء أو حمراء = $\frac{5+4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

د) صفراء = صفر حدث مستحيل

هـ) ليست صفراء = $\frac{12}{12} = 1$ حدث مؤكد

مثال ② سحبت بطاقة عشوائياً من 20 بطاقة مرقمة من 1 إلى 20 احسب احتمال أن تكون البطاقة المختارة تحمل عدد

أ) يقبل القسمة على 3 = $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

= {3، 6، 9، 12، 15، 18}

ب) يقبل القسمة على 5 = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

{5، 10، 15، 20}

جـ) يقبل القسمة على 3 ويقبل القسمة على 5

نأخذ التقاطع {15}

الاحتمال = $\frac{1}{20}$

د) يقبل القسمة على 3 أو يقبل القسمة 5

نأخذ الاتحاد = {3، 6، 9، 12، 15، 18، 5، 10، 20}

الاحتمال = $\frac{9}{20} = 0.45$

ملاحظات هامة :-

1) إذا كان أ، ب حدثان متنافيان

فإن أ $\cap$ ب = ϕ ، ل(أ $\cap$ ب) = صفر

2) إذا كان أ $\subset$ ب فإن

ل(أ) = ل(أ $\cap$ ب)

ل(ب) = ل(أ $\cup$ ب)

$\subset$ ← جزئية من

$\cap$ ← تقاطع $\cup$ ← اتحاد

العمليات على الأحداث :-

1) احتمال وقوع أ و ب معاً

ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ $\cup$ ب)

2) احتمال وقوع أ أو ب أو كلاهما

← احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

← احتمال وقوع أي من الحدثين

ل(أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ $\cap$ ب)

3) الفرق بين حدثين

← احتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع ب

← احتمال وقوع الحدث أ فقط

ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ $\cap$ ب)

٤ الحدث المكمل أ'

ل(أ') = ١ − ل(أ)

ل(أ) + ل(أ') = ١

ل(أ ∩ أ') = صفر

← إذا كان ل(أ) = ل(أ') فإن

ل(أ) = $\frac{1}{2}$ ، ل(أ') = $\frac{1}{2}$

٥ احتمال عدم وقوع أ و ب معاً

ل(أ ∩ ب)' = ١ − ل(أ ∩ ب)

٦ احتمال عدم وقوع أي من الحدثين

ل(أ ∪ ب)' = ١ − ل(أ ∪ ب)

٧ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

← احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

= ل(أ − ب) + ل(ب − أ)

٨ ل(ف) = ١

٩ ل(∅) = صفر

مثال ٣: إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل(ب) = $\frac{1}{12}$ ، ل(أ) = $\frac{5}{12}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{1}{3}$ أوجد

① ل(أ ∩ ب) ② ل(أ − ب)

③ ل(أ') ④ ل(أ ∪ ب)'

الحل

① ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

= $\frac{1}{12}$ + $\frac{5}{12}$ − $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{6}$

② ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

= $\frac{5}{12}$ − $\frac{1}{6}$ = $\frac{1}{4}$

③ ل(أ') = ١ − ل(أ) = ١ − $\frac{5}{12}$ = $\frac{7}{12}$

④ ل(أ ∪ ب)' = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ − $\frac{1}{3}$

= $\frac{2}{3}$

مثال ٤: إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينه وكان ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧ أوجد ل(أ) إذا كان

ⓐ أ ، ب حدثان متنافيان ب ب ⊂ أ

الحل ⓐ أ ، ب حدثان متنافيان

فإن ل(أ ∩ ب) = صفر

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٠,٧ = ل(أ) + ٠,٣ − صفر

ل(أ) = ٠,٧ − ٠,٣ = ٠,٤

ⓑ ب ⊂ أ

فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ)

∴ ل(أ) = ٠,٧

مثال ٥: إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(أ) = ٠,٨ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٦ فأوجد

أ احتمال عدم وقوع الحدث أ

ل(أ') = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٨ = ٠,٢

ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٨ + ٠,٧ − ٠,٦ = ٠,٩

جـ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

= ل(أ − ب) + ل(ب − أ)

= ل(أ) − ل(أ ∩ ب) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٨ − ٠,٦ + ٠,٧ − ٠,٦ = ٠,٣

د احتمال وقوع ب فقط

ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٧ − ٠,٦ = ٠,١

هـ احتمال عدم وقوع أي من الحدثين

ل(أ ∪ ب)' = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ − ٠,٩ = ٠,١

تمارين (٦)

[١] أكمل ما يأتي

[١] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن ل(أ ∩ ب) = ...

[٢] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن أ ∩ ب = ...

[٣] إذا كانت أ ⊂ ب فإن ل(أ ∪ ب) = ...

[٤] إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوي ....

[٥] إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة .... واحتمال ظهور كتابة .... واحتمال ظهور صورة وكتابة ....

[٦] إذا ألقي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي وعدد فردي معاً يساوي ....

[٧] إذا كان احتمال وقوع أ هو ٦٥٪ فإن احتمال وقوع أ' هو ....

[٨] إذا كان ل(أ) = ل(أ') فإن ل(أ) = ...

[٩] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين وكان ل(أ) = $\frac{1}{3}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{7}{12}$ فإن ل(ب) = ...

[١٠] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل(أ) = ٠,٧ ، ل(أ − ب) = ٠,٥ فإن ل(أ ∩ ب) = ...

[١١] إذا كان أ' هو الحدث المكمل للحدث أ فإن أ' ∪ أ = ... ، أ ∩ أ' = ...

[١٢] احتمال الحدث المستحيل = ...

[١٣] احتمال الحدث المؤكد = ...

[١٤] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٣ فإن ل(أ ∪ ب) = ...

[١٥] عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة فإن احتمال ظهور عدد زوجي = ...

[١٦] إذا كان احتمال نجاح طالب $\frac{11}{15}$ فإن احتمال رسوبه ....

[١٧] عند إلقاء حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد أقل من ٤ يساوي ....

[٢] تسع بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٩ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائياً

[١] اكتب فضاء العينة

[٢] احسب الاحتمالات الآتية

أ) أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً زوجياً

ب) أن تحمل البطاقة المسحوبة عدد يقبل القسمة على ٣

جـ) أن تحمل عدداً أولياً أكبر من ٥

[٣] إذا كان ل(أ) = $\frac{3}{8}$ ، ل(ب) = $\frac{1}{2}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{5}{8}$

فأوجد ① ل(أ ∩ ب) ② ل(أ − ب)

③ ل(أ)' ④ ل(ب − أ)

⑤ ل(أ ∪ ب)' [٦] ل(ب)'

[٤] إذا كان ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤

فأوجد [١] احسب احتمال أ و ب معاً

[٢] احسب احتمال وقوع أ أو ب

[٣] احسب احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب

[٤] احتمال عدم وقوع الحدث ب

[٥] احتمال عدم وقوع أي من الحدثين

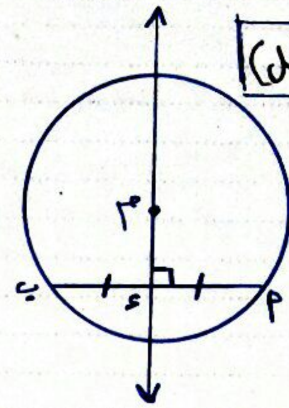
[٦] احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

[٥] كيس به ١٥ كرة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٥ سحبت منه كرة عشوائياً. إذا كان الحدث أ هو الحصول على عدد فردي ، ب حدث الحصول على عدد أولي أوجد:

ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ − ب) ، ل(أ ∩ ب) ، ل(أ ∪ ب)

الهندسة

الوحدة الرابعة (الدائرة)



مار بالمركز (محور تماثل)

ينصف القاعدة

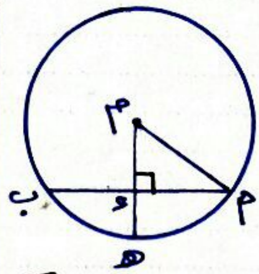
عمودى على القاعدة

1 المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عمودى على هذا الوتر

2 المستقيم المار بمركز الدائرة وعمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر

3 المستقيم العمودى على وتر الدائرة من منتصفه يكون محور تماثل لها (مار بالمركز)

مثال 1 فى الشكل المقابل



دائرة م نصف قطرها ٥ سم

$\overline{مد} \perp \overline{أب}$ ، أب = ٨ سم

أوجد طول $\overline{دهـ}$

البرهان: ∵ $\overline{مد} \perp \overline{أب}$ ∴ د منتصف $\overline{أب}$

∴ أد = د ب = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ سم

∵ م أ = م هـ = نق = ٥ سم

فى △ م د أ القائم فى د

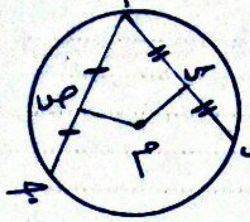
من نظرية فيثاغورث

م د = $\sqrt{٢٥ - ١٦}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣ سم

∴ د هـ = ٥ − ٣ = ٢ سم #

أكتب البرهان بأسلوبك الخاص ولكن أكتبه بالتفصيل وأكتب السبب ولا تختصر

مثال 2 فى الشكل المقابل



ق($\hat{أ}$) = ٤٣° ، س منتصف $\overline{أب}$

ص منتصف $\overline{أجـ}$ أوجد

ق(س $\hat{م}$ ص)

البرهان

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق($\hat{س}$) = ٩٠°

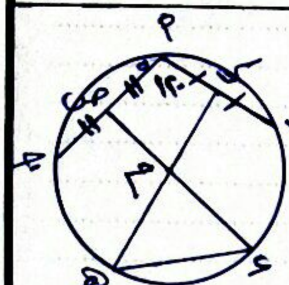
∵ ص منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ ق($\hat{ص}$) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق(س $\hat{م}$ ص) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٤٣°)

= ٣٦٠° − ٢٢٣° = ١٣٧° #

مثال 3 دائرة مركزها م



ق($\hat{أ}$) = ١٢٠° ، س منتصف $\overline{أب}$

ص منتصف $\overline{أجـ}$ أثبت أن

△ م د هـ متساوى الأضلاع

البرهان

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق($\hat{س}$) = ٩٠°

∵ ص منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ ق($\hat{ص}$) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق(س $\hat{م}$ ص) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠) = ٦٠°

∴ ق(د $\hat{م}$ هـ) = ق(س $\hat{م}$ ص) = ٦٠° بالتقابل بالرأس

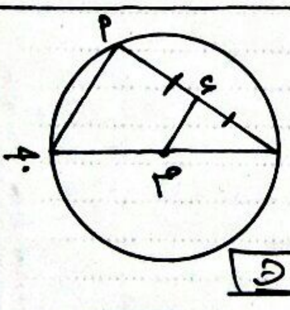
∵ م د = م هـ = نق

∴ ق($\hat{د}$) = ق($\hat{هـ}$) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢}$ = ٦٠°

∴ ق($\hat{د}$) = ق($\hat{هـ}$) = ق(د $\hat{م}$ هـ) = ٦٠°

∴ △ م د هـ متساوى الأضلاع

مثال 4 فى الشكل المقابل



دائرة مركزها م ، د منتصف $\overline{أب}$

1 أثبت أن $\overline{مد} \parallel \overline{أجـ}$

2 أوجد ق($\hat{أ}$)

البرهان

∵ د منتصف $\overline{أب}$ ، ∵ م منتصف $\overline{بجـ}$

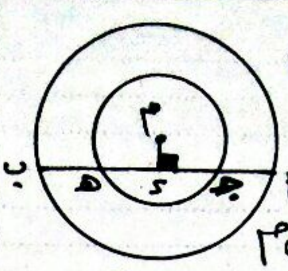
∴ $\overline{دم} \parallel \overline{أجـ}$ ، د م = $\frac{1}{2}$ أجـ نظرية 1 #

∵ د منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق($\hat{د}$) = ٩٠°

∴ ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{د}$) = ٩٠° بالتناظر (حرف F)

2 #

مثال ⑤ في الشكل المقابل



م د ⊥ أب إثبت أن

أجـ = هـ ب

البرهان في الدائرة الصغرى م

∵ م د ⊥ جـ هـ ∴ د منتصف جـ هـ

∴ جـ د = د هـ ← ①

في الدائرة الكبرى م

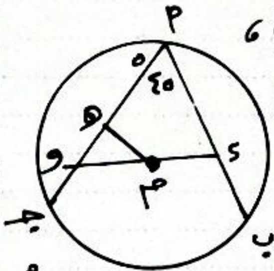
∵ م د ⊥ أب ∴ د منتصف أب

∴ أ د = د ب ← ②

بطرح ① من ② ينتج أن

أجـ = هـ ب #

مثال ⑥ د ، هـ منتصفا أب ، أجـ على الترتيب ، ق(أ̂) = ٤٥°



إثبت أن ∆ م هـ و متساوي الساقين

البرهان ∵ د منتصف أب ∴ ق(د̂) = ٩٠°

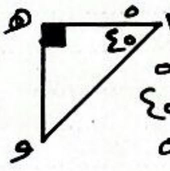
∵ هـ منتصف أجـ ∴ ق(هـ̂) = ٩٠°

∴ ق(د م̂ هـ) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٤٥°)

= ١٣٥°

∴ ق(هـ م̂ و) المكمله = ١٨٠ − ١٣٥ = ٤٥°

في ∆ م هـ و القائم في هـ

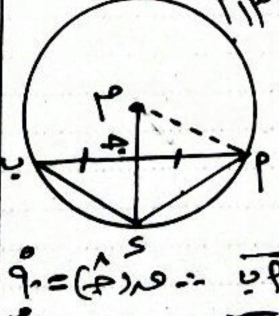


ق(و̂) = ١٨٠ − (٤٥ + ٩٠) = ٤٥°

∴ ق(م̂) = ق(و̂) = ٤٥°

∴ ∆ م هـ و متساوي الساقين

مثال ⑦ دائرة م نصف قطرها ١٣ سم



أب = ٢٤ سم ، جـ منتصف أب

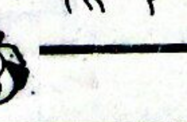
أوجد مساحة ∆ أ د ب

العمل نرسم م أ نصف قطر

البرهان ∵ جـ منتصف أب ∴ ق(م جـ̂ أ) = ٩٠°

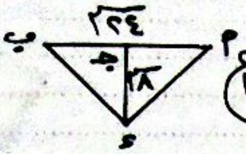
∴ أجـ = جـ ب = ١٢ سم

في ∆ م جـ أ القائم في جـ



م جـ = √((١٣)² − (١٢)²) = ٥ سم

∵ م د = نق = ١٣ سم ∴ جـ د = ١٣ − ٥ = ٨ سم

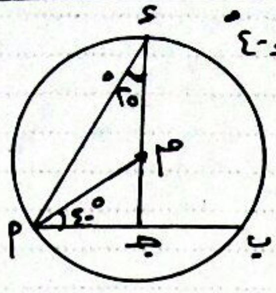


في ∆ أ ب د

مساحة ∆ = ½ طول القاعدة × الارتفاع

= ١٢ × ٨ = ٩٦ سم²

مثال ⑧ ق(د̂) = ٢٥° ، ق(م أ̂ جـ) = ٤٠°



برهن أن جـ منتصف أب

البرهان في ∆ م د أ

∵ م د = م أ = نق

∴ ق(د̂) = ق(م أ̂ د) = ٢٥°

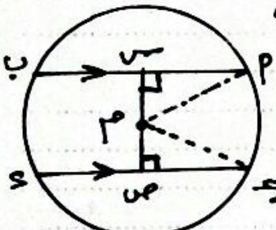
∴ ق(جـ أ̂ د) = ٤٠ + ٢٥ = ٦٥°

في ∆ د جـ أ ∵ مجموع قياسات زوايا ∆ = ١٨٠°

∴ ق(جـ̂) = ١٨٠ − (٦٥ + ٢٥) = ٩٠°

∴ م جـ ⊥ ب أ ∴ جـ منتصف أب #

مثال ⑨ أب // جـ د ، أب = ١٢ سم ،



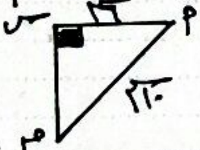
جـ د = ١٦ سم أوجد البعد بين الوترين أب ، جـ د إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٠ سم

العمل نرسم س ص حيث س ص ⊥ أب ، س ص ⊥ جـ د

∵ م س ⊥ أب ∴ س منتصف أب ∴ أ س = ٦ سم

∵ م ص ⊥ جـ د ∴ ص منتصف جـ د ∴ جـ ص = ٨ سم

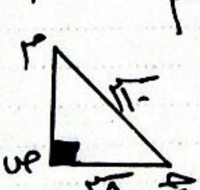
في ∆ أ س م القائم في س



من نظرية فيثاغورث

م س = √(١٠٠ − ٣٦) = √٦٤ = ٨ سم

في ∆ م جـ ص القائم في ص



من نظرية فيثاغورث

م ص = √(١٠٠ − ٦٤) = √٣٦ = ٦ سم

∴ س ص = س م + م ص = ٨ + ٦ = ١٤ سم

#

[رب اشرح لى صدرى ويسر لى أمرى]

[اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً]

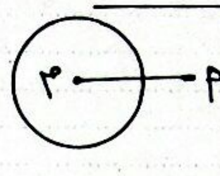
أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

الدرس الثانى

موضع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة

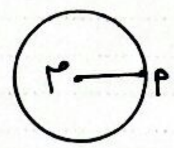
* موضع نقطة بالنسبة لدائرة

1 أ خارج الدائرة



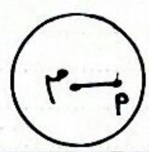
يكون $\boxed{\text{م أ} > \text{نق}}$

2 أ على الدائرة



يكون $\boxed{\text{م أ} = \text{نق}}$

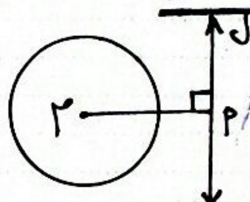
3 أ داخل الدائرة



يكون $\boxed{\text{م أ} < \text{نق}}$

* موضع مستقيم بالنسبة لدائرة :-

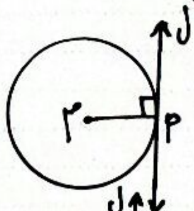
1 خارج الدائرة



$\boxed{\text{م أ} > \text{نق}}$

$\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap$ الدائرة م $= \phi$

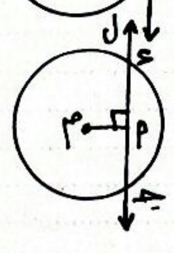
2 مماس للدائرة



$\boxed{\text{م أ} = \text{نق}}$

$\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap$ الدائرة م $= \{\text{أ}\}$

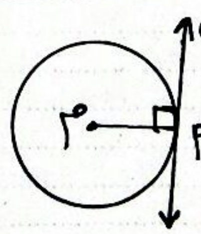
3 قاطع للدائرة



$\boxed{\text{م أ} < \text{نق}}$

$\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap$ الدائرة م $= \{\text{ء ، جـ}\}$

نتيجة 1



(المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس)

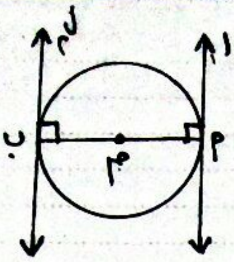
$\because \overleftrightarrow{\text{ل}}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overline{\text{م أ}}$ نصف قطر

$\therefore$ ق$(\hat{\text{أ}}) = 90°$

نتيجة 2

المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماساً للدائرة

نتيجة 3

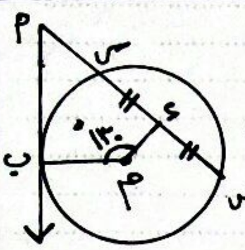


(المماسان للدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيان)

أى أن $\overleftrightarrow{\text{ل}_1} \parallel \overleftrightarrow{\text{ل}_2}$

مثال 1

فى الشكل المقابل



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند ب ، ء منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، ق$(\angle$ ء م ب$) = 130°$

أوجد ق$(\hat{\text{أ}})$

البرهان

$\because$ ء منتصف $\overline{\text{س ص}}$

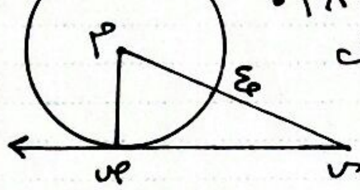
$\therefore$ ق$(\hat{\text{ء}}) = 90°$

$\because \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس ، $\overline{\text{م ب}}$ نصف قطر $\therefore$ ق$(\hat{\text{ب}}) = 90°$

$\therefore$ ق$(\hat{\text{أ}}) = 360° - (90° + 90° + 130°) = 50°$ #

مثال 2

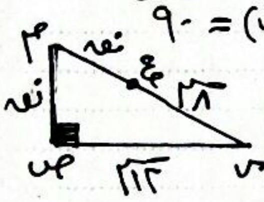
فى الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند ص ، ع $\in$ م س ، س ع $= 8$ ، س ص $= 12$ أحسب طول نصف قطر الدائرة م



البرهان

$\because \overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس $\therefore$ ق$(\hat{\text{ص}}) = 90°$

فى $\triangle$ س ص م القائم فى ص



باستخدام نظرية فيثاغورث

$(\text{س م})^2 = (\text{س ص})^2 + (\text{ص م})^2$

$(8 + \text{نق})^2 = (12)^2 + (\text{نق})^2$

$64 + \cancel{\text{نق}^2} + 16\,\text{نق} = 144 + \cancel{\text{نق}^2}$

$16\,\text{نق} = 144 - 64$

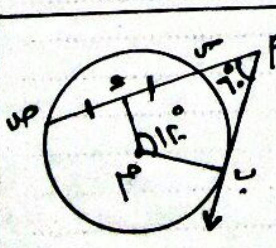
$\frac{16\,\text{نق}}{16} = \frac{80}{16}$

$\therefore$ نق $= 5$ سم

$\therefore$ طول نصف قطر الدائرة $= 5$ سم

مثال 3

ء منتصف $\overline{\text{س ص}}$



ق$(\hat{\text{أ}}) = 60°$ ، ق$(\hat{\text{م}}) = 120°$

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند نقطة ب

01002097866

البرهان: ∵ ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ∴ ق(∠ء) = 90°

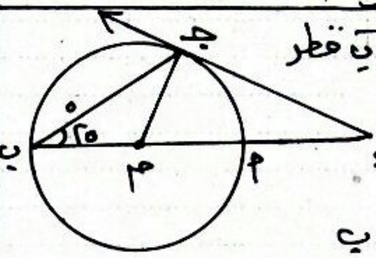
∴ ق(∠ب) = $360^\circ - (60^\circ + 120^\circ + 90^\circ)$

= 90° = زاوية قائمة

∴ $\overleftrightarrow{ا ب} \perp \overline{ب م}$ عند نقطة ب

∴ $\overleftrightarrow{ا ب}$ مماس للدائرة م عند ب

مثال 4 $\overleftrightarrow{ء جـ}$ مماس ، $\overline{ا ب}$ قطر



ق(∠ب) = 25° أوجد ق(∠ء)

البرهان: في ∆ م جـ ب

∵ م جـ = م ب = نق

∴ ق(∠م جـ ب) = ق(∠ب) = 25°

∵ $\overleftrightarrow{ء جـ}$ مماس ، $\overline{م جـ}$ نصف قطر

∴ ق(∠ء جـ م) = 90°

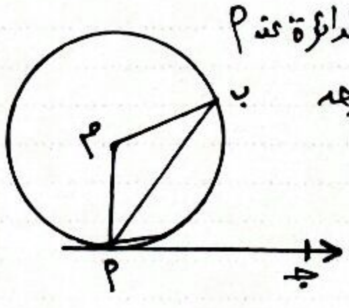
∴ ق(∠ء جـ ب) = $90^\circ + 25^\circ = 115^\circ$

في ∆ ء جـ ب

ق(∠ء) = $180^\circ - (115^\circ + 25^\circ) = 180^\circ - 140^\circ$

= 40° #

مثال 5 $\overrightarrow{ا جـ}$ مماس للدائرة عند ا



ق(∠ا ب م) = 40° أوجد ق(∠ب ا جـ)

البرهان

في ∆ م ب ا

∵ م ب = م ا = نق

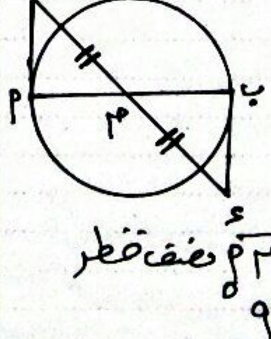
∴ ق(∠ب ا م) = ق(∠ا ب م) = 40°

∵ $\overrightarrow{ا جـ}$ مماس ، $\overline{ا م}$ نصف قطر

∴ ق(∠جـ ا م) = 90°

∴ ق(∠ب ا جـ) = $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

مثال 6 في الشكل المقابل



$\overrightarrow{ا جـ}$ مماس للدائرة عند ا

جـ م = م ء أثبت أن

ب ء مماس للدائرة م عند ب

البرهان: ∵ $\overrightarrow{ا جـ}$ مماس ، $\overline{م ا}$ نصف قطر

∴ ق(∠ا) = 90°

∆∆ م ب ء ، م ا جـ

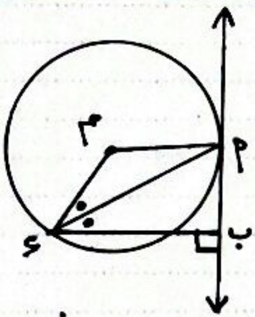
فيهما:
- م ء = م جـ معطى
- م ب = م ا = نق
- ق(∠ء م ب) = ق(∠جـ م ا) بالتقابل بالرأس

∴ ∆ ء ب م ≡ ∆ جـ ا م وينتج أن

ق(∠ا) = ق(∠ب) = 90°

∴ $\overline{ب ء} \perp \overline{م ب}$ ∴ $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماس للدائرة م عند ب

مثال 7 في الشكل المقابل



ق(∠م ء ا) = ق(∠ا ء ب)

$\overline{ء ب} \perp \overleftrightarrow{ا ب}$ أثبت أن

$\overleftrightarrow{ا ب}$ مماس للدائرة م عند ا

البرهان: في ∆ م ا ء ∵ م ا = م ء = نق

∴ ق(∠م ا ء) = ق(∠م ء ا) ← (1)

∵ ق(∠م ء ا) = ق(∠ا ء ب) ← معطى (2)

من (1) ، (2) ينتج أن

ق(∠م ا ء) = ق(∠ا ء ب) وهما في وضع تبادل

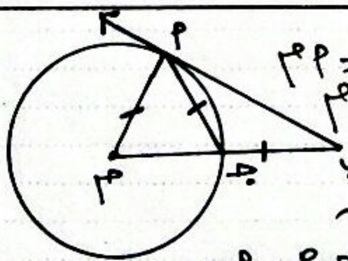
∴ $\overline{ا م} \parallel \overline{ب ء}$

∴ ق(∠ب ا م) = ق(∠ب) = 90° بالتناظر

∴ $\overleftrightarrow{ا ب} \perp \overline{ا م}$ من عند ا

∴ $\overleftrightarrow{ا ب}$ مماس للدائرة م عند ا

مثال 8 ب جـ = جـ ا = ا م



إثبت أن $\overleftrightarrow{ب ا}$ مماس للدائرة م

البرهان

∵ م ا = م جـ = نق

∴ ب جـ = جـ م = م ا = ا جـ

∴ ا جـ = $\frac{1}{2}$ ب م

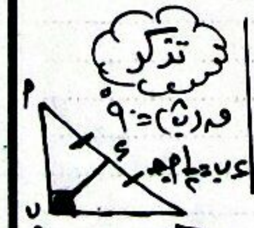
∴ $\overline{ا جـ}$ خارج من زاوية قائمة

∴ ق(∠ا) قائمة ∴ $\overline{ب ا} \perp \overline{ا م}$

∴ $\overleftrightarrow{ب ا}$ مماس للدائرة م عند ا

#

تذكر

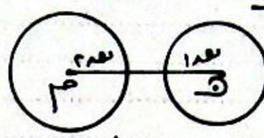


المتوسط الخارج من الزاوية القائمة = ½ طول الوتر

الدرس الثالث

موضع دائرة بالنسبة لدائرة

(1) الدائرتان المتباعدتان :-

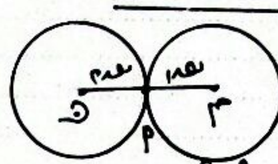


$\boxed{\text{م ن} > \text{نق}_1 - \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = φ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = φ

(2) الدائرتان المتماستان من الخارج :

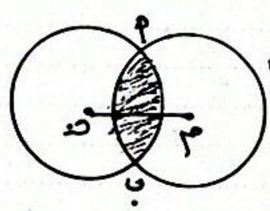


$\boxed{\text{م ن} = \text{نق}_1 + \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ}

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ}

(3) متقاطعتان :



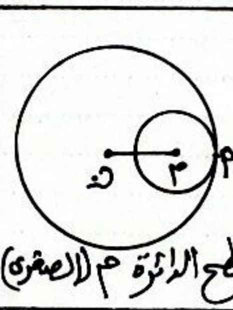
$\boxed{\text{نق}_1 - \text{نق}_2 < \text{م ن} < \text{نق}_1 + \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = المنطقة المظللة

← أى دائرتين تتقاطعان فى نقطتين على الأكثر

(4) متماستان من الداخل :

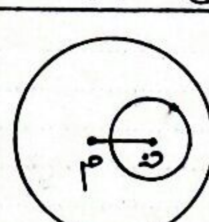


$\boxed{\text{م ن} = \text{نق}_1 - \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ}

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة م (الصغرى)

(5) متداخلتان

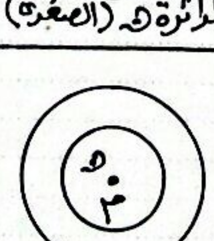


$\boxed{\text{م ن} < \text{نق}_1 - \text{نق}_2}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = φ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن (الصغرى)

(6) متحدتى المركز

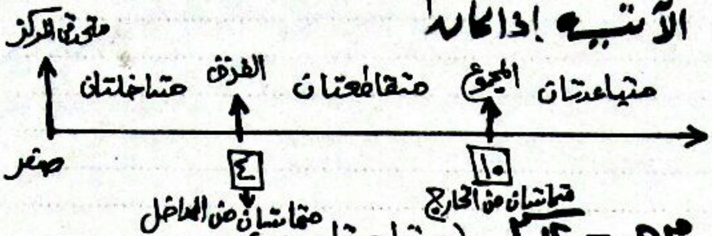


$\boxed{\text{م ن} = \text{صفر}}$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = φ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = الدائرة الصغرى ن (الصغرى)

م ، ن دائرتان نصف قطر كلاً منهم ٧ ، ٣ أوجد وضع كلاً منهم بالنسبة للأخرى فى الحالات الآتية إذا كانت



م ن = ١٢ (متباعدتان)

م ن = ١٠ (متماستان من الخارج)

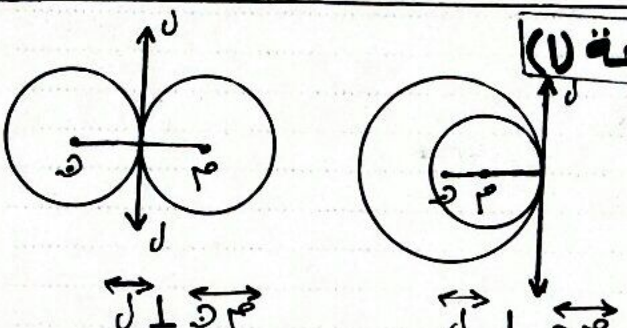
م ن = ٨ (متقاطعتان)

م ن = ٤ (متماستان من الداخل)

م ن = ٢ (متداخلتان)

م ن = صفر (متحدتى المركز)

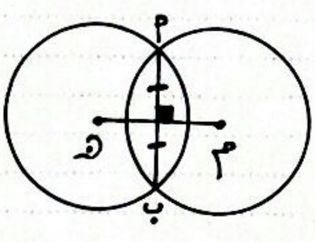
نتيجة (1)



$\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

« خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس ويكون عمودياً على المماس المشترك عند نقطة التماس »

نتيجة (2)



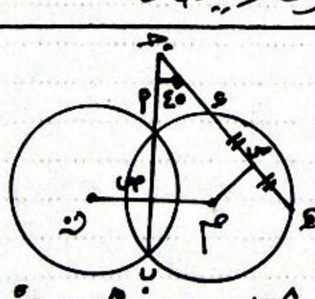
$\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط مركزين

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وينصفه

« خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه »

مثال (1)



س منتصف $\overline{\text{ء هـ}}$ ، ق(ج) = ٤٠° أوجد ق(س م ص)

البرهان ∵ س منتصف $\overline{\text{ء هـ}}$

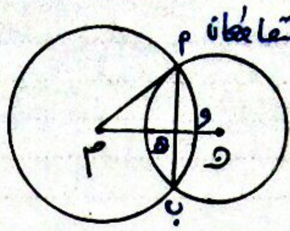
∴ ق(م س ج) = ٩٠° ،

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط مركزين ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك ∴ ق(ص) = ٩٠°

∴ ق(س م ص) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٤٠) = ١٣٠° #

مثال ②

م ، ن دائرتان متقاطعتان

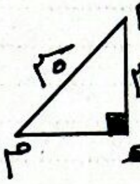


أب = ٦ سم ، م أ = ٥ سم ،
م ن = ٧ سم أوجد طول
أ هـ ، هـ و .

البرهان ∵ م ن خط مركزين ، أب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أب وينصفه

∴ أ هـ = هـ ب = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ سم



في Δ أ هـ م القائم في هـ

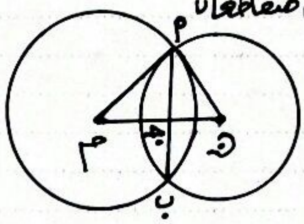
هـ م = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم

∴ هـ م = ٥ − ٤ = ١ سم #

حيث م أ = م و = نق = ٥ سم

مثال ③

م ، ن دائرتان متقاطعتان



في أ ، ب م أ = ٦ سم ،
ن أ = ٨ سم ، م ن = ١٠ سم
فأوجد طول أب

البرهان في Δ ن أ م

$(ن م)^٢ = (١٠)^٢ = ١٠٠$ سم

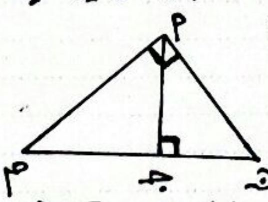
$(ن أ)^٢ + (م أ)^٢ = (٨)^٢ + (٦)^٢ = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$

∴ $(ن م)^٢ = (ن أ)^٢ + (م أ)^٢$ (يحقق فيثاغورث)

∴ Δ ن أ م قائم في أ

∵ م ن خط مركزين ، أب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أب ، أ جـ = جـ ب



في Δ ن أ م القائم في أ

∵ أ جـ ⊥ ن م

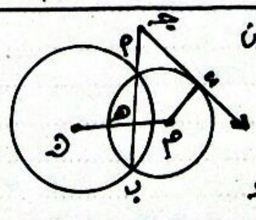
من نظرية إقليدس

أ جـ = $\frac{ن أ \times م أ}{ن م}$ = $\frac{٨ \times ٦}{١٠}$ = ٤٫٨ سم

أب = ٢ × أ جـ = ٢ × ٤٫٨ = ٩٫٦ سم #

مثال ④

م ، ن دائرتان متقاطعتان



في أ ، ب ، ق(∠ د م هـ) = ١٢٠°
ق(∠ جـ) = ٥٥° إثبت أن
جـ د مماس للدائرة م عند د

البرهان ∵ م ن خط مركزين ، أب وتر مشترك

∴ ق(∠ هـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ د) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ٥٥° + ٩٠°)

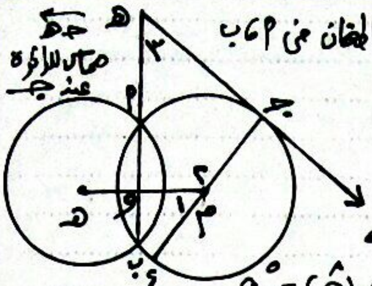
= ٣٦٠° − ٢٧٠° = ٩٠°

∴ جـ د ⊥ م د

∴ جـ د مماس للدائرة م عند د

مثال ⑤

م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب



جـ د قطر إثبت أن
ق(∠ د م ن) = ق(∠ جـ هـ ب)

البرهان ∵ جـ هـ مماس ،

م جـ نصف قطر ∴ ق(∠ جـ) = ٩٠°

∵ م ن خط المركزين ، أب وتر مشترك

∴ ق(∠ و) = ٩٠°

∵ ق(∠ جـ) + ق(∠ و) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

في الشكل الرباعي هـ جـ م و

ق(∠٣) + ق(∠٢) = ٣٦٠° − ١٨٠° = ١٨٠°

∴ ق(∠٣) + ق(∠٢) = ١٨٠° ⟵ ①

ق(∠٢) + ق(∠١) = ١٨٠ ⟵ ② خط مستقيم

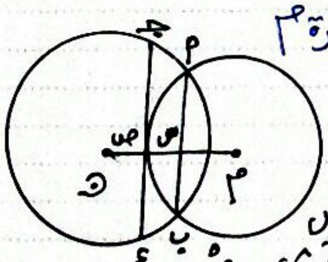
من ① ، ② ينتج أن

ق(∠٣) = ق(∠١)

∴ ق(∠ د م ن) = ق(∠ جـ هـ ب) #

مثال ⑥

جـ د مماس للدائرة م عند جـ



إثبت أن
أب // جـ د

البرهان ∵ م ن خط مركزين

، أب وتر مشترك ∴ ق(∠ س) = ٩٠°

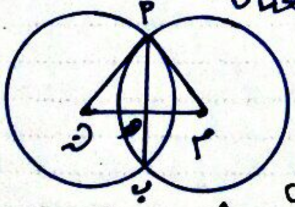
∵ جـ د مماس ، م ص نصف قطر ∴ ق(∠ ص) = ٩٠°

∵ ق(∠ س) = ق(∠ ص) وهما في وضع تناظر

∴ أب // جـ د

مثال ⑦

م ، ن دائرتان متقاطعتان



في أ ، ب ومتطابقتان
إثبت أن م هـ = هـ ن

البرهان ∵ م ن خط مركزين

، أب وتر مشترك ∴ ق(∠ هـ) = ٩٠°

Δ Δ أ هـ م ، أ هـ ن . (نثبت تطابقهما)

فيهما { م أ = هـ م = نق
م هـ ضلع مشترك
ق(∠ م هـ أ) = ق(∠ م هـ ب) = 90° }

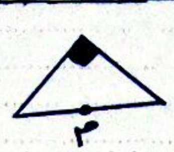
∴ Δ أ هـ م ≡ Δ ب هـ م وينتج أن

∴ $\boxed{\text{هـ أ = هـ ب}}$ #

المثلث الحاد الزوايا

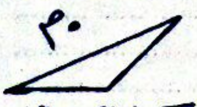
مركز الدائرة داخل المثلث

المثلث القائم



مركز الدائرة الخارجة عنه يقع في منتصف الوتر

المثلث المنفرج

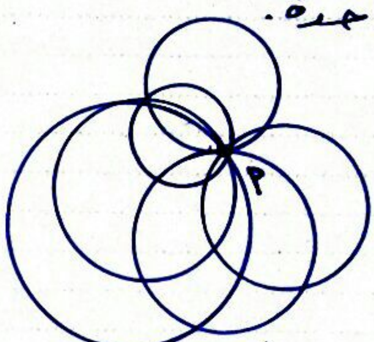


مركز الدائرة الخارجة عنه تقع خارج المثلث

الدرس الرابع : [تعيين الدائرة]

1) رسم دائرة تمر بنقطة واحدة :

← يمكن رسم عدد لانهائي من الدوائر التي تمر بنقطة واحدة.



2) رسم دائرة تمر بنقطتين

← يمكن رسم عدد لانهائي من الدوائر التي تمر بنقطتين

← مركز هذه الدوائر يقع على محور تماثل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

← مركز أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ، ب هو منتصف $\overline{\text{أب}}$

3) رسم دائرة تمر بثلاث نقاط

أ) تقع على استقامة واحدة

← عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة = صفر

ب) ليست على استقامة واحدة :-

← يمكن رسم دائرة واحدة

← مركز الدائرة الخارجية عن المثلث هي نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

[أو الأعمدة المقامة من منتصفات أضلاعه]

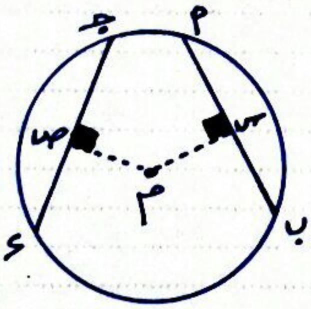
← مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه وهي نفسها نقطة تقاطع متوسطات أضلاعه وهي نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية وهي نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته.

مثال (1) ارسم $\overline{\text{أب}}$ طولها 6 سم ثم ارسم الدائرة المارة بالنقطتين أ، ب والتي نصف قطرها 4 سم (كم عدد الحلول الممكنة)

مثال (2) ارسم Δ أ ب جـ حيث أب = 5 سم، ب جـ = 6 سم، أ جـ = 7 سم ثم ارسم الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

الدرس الخامس :-

[علاقة أوتار الدائرة بمركزها]



نظرية

[الأوتار المتساوية في الطول في دائرة تكون على أبعاد متساوية من مركزها]

عكس النظرية

[في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول]

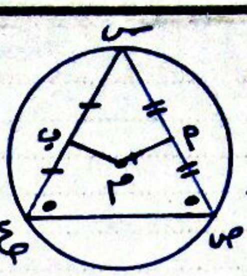
∵ أب = جـ ء وتر = وتر

∴ م س = م ص بعد = بعد

والعكس ∵ م س = م ص بعد = بعد

∴ أب = جـ ء وتر = وتر

مثال (١)



أ منتصف س ص ، ب منتصف س ع ، ق(ص̂) = ق(ع̂) إثبت أن م أ = م ب

البرهان ∵ أ منتصف س ص ∴ ق(أ̂) = ٩٠°

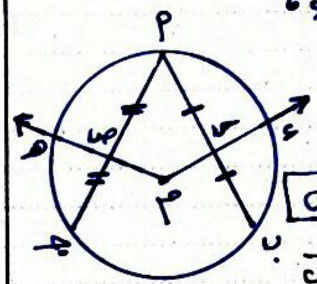
∵ ب منتصف س ع ∴ ق(ب̂) = ٩٠°

∵ ق(ص̂) = ق(ع̂) ∴ Δ س ص ع متساوي الساقين

∴ س ص = س ع وتر = وتر

∴ م أ = م ب بعد = بعد #

مثال (٢)



س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ ، أ ب = أ جـ

إثبت أن $\boxed{\text{ء س = هـ ص}}$

البرهان ∵ س منتصف أ ب ∴ ق(س̂) = ٩٠° ، ∵ ص منتصف أ جـ

∴ ق(ص̂) = ٩٠°

∵ أ ب = أ جـ وتر = وتر ∴ م س = م ص (١)

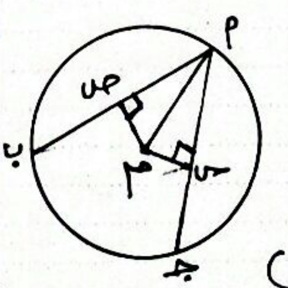
بعد = بعد

∵ م ء = م هـ = نق (٢)

بطرح (١) من (٢) ينتج أن

ء س = هـ ص #

مثال (٣)



أ ب ، أ جـ وتران متساويان في الطول

م س ⊥ أ جـ ، م ص ⊥ أ ب

إثبت أن

ق(س أ̂ م) = ق(ص أ̂ م)

البرهان ∵ م س ⊥ أ جـ ∴ س منتصف أ جـ

∵ م ص ⊥ أ ب ∴ ص منتصف أ ب

∵ أ ب = أ جـ معطى ∴ ½ أ ب = ½ أ جـ

∴ أ س = أ ص

∵ أ ب = أ جـ وتر = وتر

∴ م س = م ص بعد = بعد

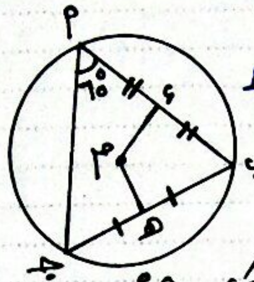
في ΔΔ أ م س ، أ م ص

فيهما:
- أ س = أ ص
- م س = م ص بعد = بعد
- أ م ضلع مشترك

∴ Δ أ م س ≡ Δ أ م ص وينتج من التطابق أن

ق(س أ̂ م) = ق(ص أ̂ م) #

مثال (٤)



ق(أ̂) = ٦٥° ، ء ، هـ منتصفا أ ب ، ب جـ ، م ء = م هـ

أوجد ق(ب̂)

البرهان ∵ ء منتصف أ ب ∴ ق(ء̂) = ٩٠°

∵ هـ منتصف ب جـ ∴ ق(هـ̂) = ٩٠°

∵ م ء = م هـ معطى بعد = بعد

∴ أ ب = ب جـ وتر = وتر

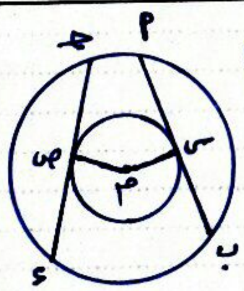
∴ Δ أ ب جـ متساوي الساقين

∴ ق(أ̂) = ق(جـ̂) = ٦٥°

∴ ق(ب̂) = ١٨٠ − (٦٥° + ٦٥°)

= ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° #

مثال (٥)



دائرتان متحدتا المركز م

إثبت أن أ ب = جـ ء

البرهان في الدائرة الصغرى م

م س = م ص = نق

في الدائرة الكبرى م

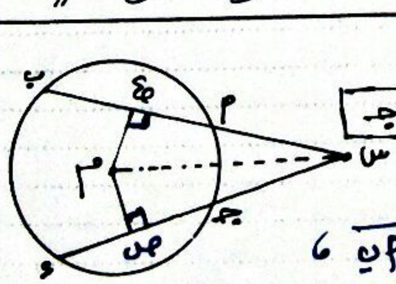
∵ أ ب مماس ∴ م س ⊥ أ ب

∵ جـ ء مماس ∴ م ص ⊥ جـ ء

∴ م س = م ص بعد = بعد

∴ أ ب = جـ ء وتر = وتر #

مثال (٦)



أ ب = جـ ء

إثبت أن $\boxed{\text{س أ = س جـ}}$

البرهان

العمل نرسم م ع ⊥ أ ب ،

نرسم م ص ⊥ جـ ء ، نصل س م

∵ أ ب = جـ ء وتر = وتر ∴ م ع = م ص بعد = بعد

ΔΔ س ع م ، س ص م فيهما

فيهما $\left\{ \begin{array}{l} \text{م ع = م ص} \quad \text{بعد = بعد} \\ \overline{\text{س م}} \text{ ضلع مشترك} \\ \text{ق(ع}\hat{}\text{) = ق(ص}\hat{}\text{) = } 90^\circ \end{array} \right.$

∴ Δ س ع م ≡ Δ س ص م ينتج أن

س ع = س ص ← (١)

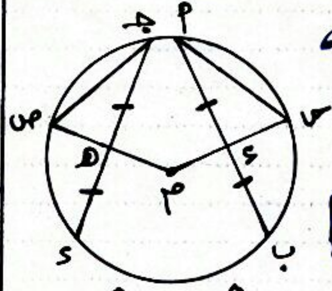
∵ أ ب = جـ د ∴ $\frac{1}{2}$ أ ب = $\frac{1}{2}$ جـ د

∴ أ ع = جـ ص ← (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن

س أ = س جـ #

مثال ٧



و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ،

هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ ،

أ ب = جـ د

إثبت أن $\boxed{\text{أ س = جـ ص}}$

البرهان ∵ و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(و$\hat{}$) = ٩٠°

∵ هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ ∴ ق(هـ$\hat{}$) = ٩٠°

∵ أ ب = جـ د وتر = وتر

∴ م و = م هـ بعد = بعد ← (١)

∵ م س = م ص = نق ← (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن

$\boxed{\text{س و = ص هـ}}$

∵ أ ب = جـ د ∴ $\frac{1}{2}$ أ ب = $\frac{1}{2}$ جـ د

∴ $\boxed{\text{أ و = جـ هـ}}$

Δ Δ أ و س ، جـ هـ ص

فيهما $\left\{ \begin{array}{l} \text{أ و = جـ هـ} \\ \text{س و = ص هـ} \\ \text{ق(و}\hat{}\text{) = ق(هـ}\hat{}\text{) = } 90^\circ \end{array} \right.$

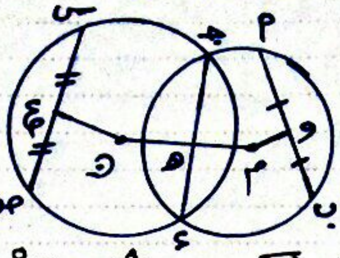
∴ Δ أ و س ≡ Δ جـ هـ ص

وينتج أن $\boxed{\text{أ س = جـ ص}}$ #

(Maths is Great Subject)

مثال ٨

م ، ن دائرتان متقاطعتان في جـ ، د



و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ،

ع منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ،

م و = م هـ ، ن هـ = ن ع

إثبت أن أ ب = س ص

البرهان ∵ و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(و$\hat{}$) = ٩٠°

∵ ع منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ∴ ق(ع$\hat{}$) = ٩٠°

∵ م و = م هـ بعد = بعد

∴ أ ب = جـ د وتر = وتر ← (١)

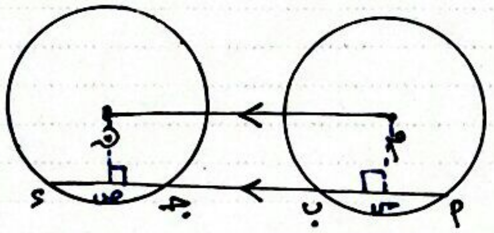
∵ ن هـ = ن ع بعد = بعد

∴ جـ د = س ص وتر = وتر ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\boxed{\text{أ ب = س ص}}$ #

مثال ٩



م ، ن دائرتان متطابقتان

$\overline{\text{م ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ د}}$

إثبت أن

أ جـ = ب د

البرهان

العمل نرسم $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{جـ د}}$

∵ $\overline{\text{م ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ∴ م س ص ن مستطيل

∴ م س = ن ص بعد = بعد

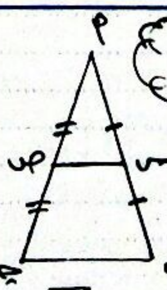
∴ أ ب = جـ د وتر = وتر

بإضافة $\overline{\text{ب جـ}}$ للطرفين

أ ب + ب جـ = جـ د + ب جـ

∴ أ جـ = د ب #

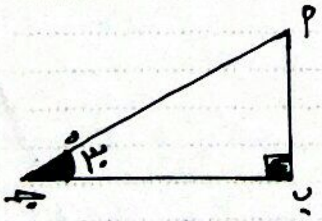
تذكر



س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

ص منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ ب جـ



∵ ق(ب$\hat{}$) = ٩٠° ، ق(جـ$\hat{}$) = ٣٠°

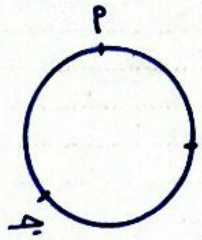
∴ $\boxed{\text{أ ب = } \frac{1}{2} \text{ أ جـ}}$

(الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي $\frac{1}{2}$ طول الوتر)

الوحدة الخامسة

١ [الزوايا والأقواس]

القوس: هو جزء من الدائرة محدد بنقطتين على الدائرة ويرمز له بالرمز



$\overset{\frown}{أب}$ أو $\overset{\frown}{بجـ}$ أو $\overset{\frown}{أجـ}$ أو

$\overset{\frown}{أبجـ}$ أو $\overset{\frown}{بجـأ}$ أو $\overset{\frown}{بأجـ}$

قياس الدائرة = ٣٦٠°

قياس أي جزء من الدائرة = الجزء × ٣٦٠°

مثال: قياس نصف الدائرة

$= \frac{1}{2} \times$ ٣٦٠° = ١٨٠°

قياس $\frac{1}{3}$ دائرة

$= \frac{1}{3} \times$ ٣٦٠° = ١٢٠°

قياس $\frac{1}{4}$ دائرة

$= \frac{1}{4} \times$ ٣٦٠° = ٩٠°

محيط الدائرة = ٢ ط نق

محيط أي جزء من الدائرة = الجزء × ٢ ط نق

مثال: نصف طول الدائرة

$= \frac{1}{2} \times$ ٢ ط نق = ط نق سم

$\frac{1}{4}$ طول الدائرة

$= \frac{1}{4} \times$ ٢ ط نق = $\frac{\text{ط نق}}{2}$ = $\frac{1}{2}$ ط نق

نتائج هامة:-

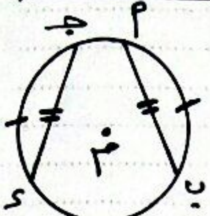
← في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة

١ الأقواس المتساوية في الطول تكون متساوية في القياس والعكس صحيح

∵ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{جـد}$)

∴ طول $\overset{\frown}{أب}$ = طول $\overset{\frown}{جـد}$

٢ الوتران المتساويان يحصران قوسان متساويان في القياس



∵ أب = جـد

فإن ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{جـد}$)

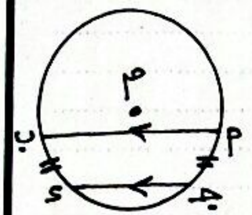
والعكس إذا كان ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{جـد}$)

∴ أب = جـد

∴ قوس = قوس

وتر = وتر (والعكس)

٣ الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس.

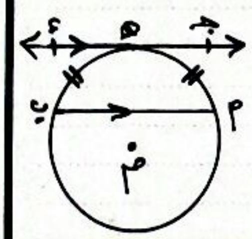


∵ $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$

∴ ق($\overset{\frown}{أجـ}$) = ق($\overset{\frown}{بد}$)

والعكس صحيح

٤ القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه في الدائرة متساويان في القياس



∵ $\overleftrightarrow{هـد}$ مماس ، $\overline{أب}$ وتر

∵ $\overleftrightarrow{هـد}$ // $\overline{أب}$

∴ ق($\overset{\frown}{أهـ}$) = ق($\overset{\frown}{هـب}$)

العلاقة بين طول القوس وقياس القوس:-

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{360°}$ × ٢ ط نق

حيث نق هو نصف القطر ، ط = $\frac{22}{7}$

مثال ① أوجد قياس القوس الذي يمثل $\frac{1}{3}$ قياس الدائرة وإذا كان نصف قطر الدائرة ١٥ سم أوجد طول هذا القوس (ط = ٣,١٤)

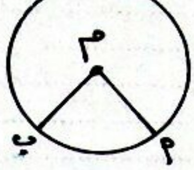
الحل

قياس القوس = $\frac{1}{3}$ × ٣٦٠° = ١٢٠°

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{360°}$ × ٢ ط نق

$= \frac{120°}{360°}$ × ٢ × ٣,١٤ × ١٥ = ٣١,٤ سم #

* **الزاوية المركزية :-**



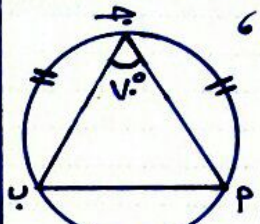
هى زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها أنصاف أقطار فى الدائرة

∠ أ م ب زاوية مركزية

* **قياس القوس** : يساوى قياس الزاوية المركزية المقابلة لهذا القوس

أى أن ق(∠أ م ب) = ق(⌒أب)

مثال ② ق(⌒أجـ) = ق(⌒بجـ) ، ق(∠أجـ ب) = ٧٠° أوجد ق(∠أ ب جـ)



البرهان ∵ ق(⌒أجـ) = ق(⌒بجـ) قوس = قوس

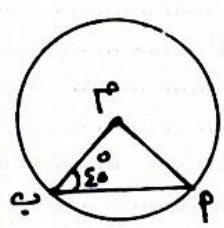
∴ أ جـ = ب جـ وتر = وتر

∴ Δ أ جـ ب متساوى الساقين

∴ ق(∠جـ أ ب) = ق(∠أ ب جـ) = (١٨٠ − ٧٠)/٢

= ٥٥° #

مثال ③ ق(∠م ب أ) = ٤٥° ، أ م = ٧ سم أوجد طول ⌒أب (ط = ٢٢/٧)



البرهان فى Δ م أ ب

∵ م أ = م ب = نق ∴ Δ م أ ب متساوى الساقين

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٥°

∴ ق(∠أ م ب) = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠°

∴ ق(⌒أب) = ق(∠أ م ب) = ٩٠°

∴ طول ⌒أب = ق(⌒أب)/٣٦٠° × ٢ ط نق

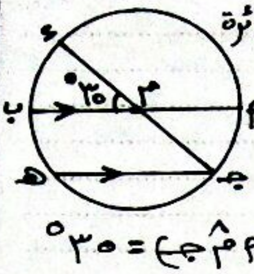
= ٩٠/٣٦٠° × ٢ × ٢٢/٧ × ٧

= ١١ سم #

[السؤال نصف العلم والمعرفة]

فلا تخجل من السؤال أو كثرة الأسئلة

مثال ④ أب ، جـ ء قطران فى الدائرة م بحيث ق(∠ء م ب) = ٣٥° ، جـ هـ // أب أوجد ق(⌒ب هـ)



البرهان ∵ ق(∠ء م ب) = ق(∠أ م جـ) = ٣٥° بالتقابل بالرأس

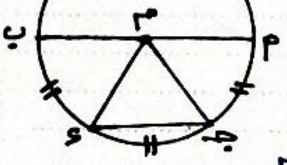
∵ أب // جـ هـ وتر // وتر

∴ ق(⌒أجـ) = ق(⌒ب هـ) قوس = قوس

∵ ق(⌒أجـ) = ق(∠أ م جـ) = ٣٥°

∴ ق(⌒ب هـ) = ٣٥° #

مثال ⑤ أب قطر فى الدائرة التى مركزها م ق(⌒أجـ) = ق(⌒جـ ء) = ق(⌒ء ب) إثبت أن Δ م جـ ء متساوى الأضلاع



البرهان ∵ أب قطر فى الدائرة م

∴ ق(⌒أ جـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(⌒أجـ) = ق(⌒جـ ء) = ق(⌒ء ب) = ١٨٠/٣ = ٦٠°

∴ ق(∠جـ م ء) = ٦٠° المركزية

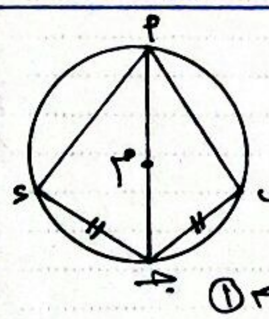
فى Δ م جـ ء ∵ م جـ = م ء

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ء) = (١٨٠ − ٦٠)/٢ = ٦٠°

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ء) = ق(∠جـ م ء) = ٦٠°

∴ Δ م جـ ء متساوى الأضلاع

مثال ⑥ أ ب جـ ء شكل رباعى ، أجـ قطر فى الدائرة ، جـ ب = جـ ء إثبت أن ق(⌒أب) = ق(⌒أ ء)



البرهان ∵ أجـ قطر فى الدائرة م

∴ ق(⌒أ ب جـ) = ق(⌒أ ء جـ) ← ①

∵ ب جـ = جـ ء وتر = وتر

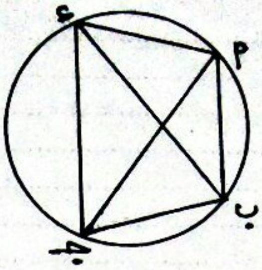
∴ ق(⌒ب جـ) = ق(⌒ء جـ) ← ② قوس = قوس

بطرح ② من ①

∴ ق(⌒أب) = ق(⌒أ ء) قوس = قوس

∴ أ ب = أ ء وتر = وتر #

مثال ٧ في الشكل المقابل



أجـ = ب ء

فأثبت أن أ ء = ب جـ

البرهان ∵ أجـ = ب ء

وتر = وتر

∴ ق(أ⌒ب جـ) = ق(ب⌒أ ء)

بطرح ق(أ⌒ب) من الطرفين

ينتج أن

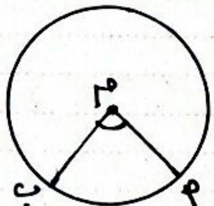
ق(أ⌒ء) = ق(ب⌒جـ) قوس = قوس

∴ أ ء = ب جـ وتر = وتر #

الدرس الثاني :-

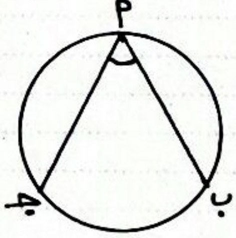
العلاقة بين الزاوية المحيطية والمركزية والمماسية المشتركة معاً في القوس

١ الزاوية المركزية :-



هي زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها أنصاف أقطار في الدائرة.

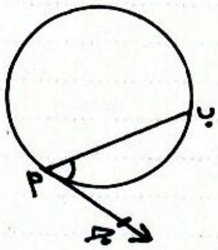
٢ الزاوية المحيطية :-



هي زاوية رأسها تقع على الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة

∠ ب أ جـ محيطية

٣ الزاوية المماسية :-



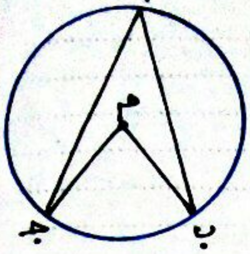
هي زاوية رأسها على الدائرة وضلعاها وتر ومماس مرسوم من أحدى نهايتي الوتر في الدائرة

∠ ب أ̂ جـ مماسية تقابل أ⌒ب

نظرية ١

قياس الزاوية المحيطية = $\frac{1}{2}$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

قياس الزاوية المحيطية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس المقابل لها.



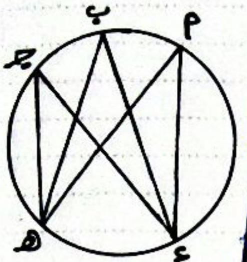
∵ ق(ب م̂ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب أ̂ جـ)

المحيطية = $\frac{1}{2}$ المركزية

ق(ب أ̂ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب⌒جـ)

ق(ب م̂ جـ) = ق(ب⌒جـ)

نظرية ٢

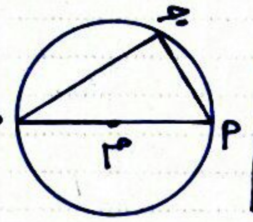


الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس

∠ أ ، ∠ ب ، ∠ جـ زوايا محيطية مرسومة على نفس القوس ء هـ

∴ ق(أ̂) = ق(ب̂) = ق(جـ̂)

نتيجة هامة :-



الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

∵ أب قطر في الدائرة م

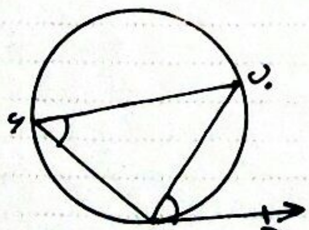
∴ ق(أ جـ̂ ب) = ٩٠° قائمة

ملاحظات

* قياس القوس يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المحصور بين ضلعيها

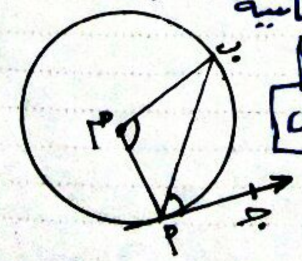
* قياس الزاوية المركزية تساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

نظرية ٣



قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس

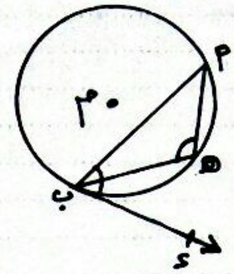
ق(ء̂) المحيطية = ق(ب أ̂ جـ) المماسية



نتيجة قياس الزاوية المماسية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

ق(ب م̂ أ) = ق(ب أ̂ جـ)

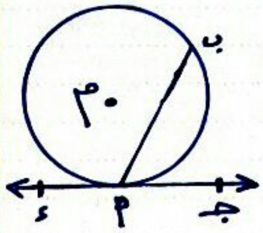
ملاحظة



الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفي جهة واحدة منه.

ق(∠أ هـ ب) المحيطية + ق(∠أ ب ء) المماسية = 180°

ملاحظة

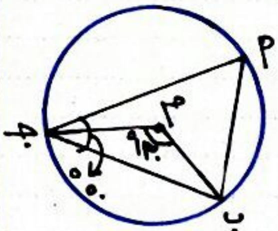


قياس الزاوية المماسية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس المحصور بين ضلعيها

ق(∠ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أ ب) الأصغر

ق(∠ب أ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أ ب) الأكبر

مثال ① ق(∠ب م جـ) = 130°، ق(∠أ جـ ب) = 50° أوجد ق(∠أ ب جـ)



البرهان ∵ ∠أ محيطية، ∠م مركزية مشتركتان في ⌒ب جـ

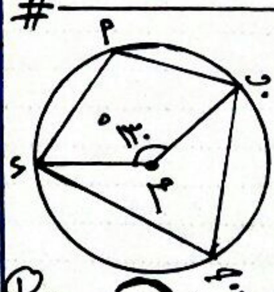
∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م جـ) = 65°

في Δ أ ب جـ

ق(∠أ ب جـ) = $180 - (50^\circ + 65^\circ) = 65^\circ$

#

مثال ② ق(∠ب م ء) = 130°



أوجد ق(∠ب جـ ء)، ق(∠ب أ ء)

البرهان ق(∠ب جـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م ء) = 65° #①

محيطية ومركزية مشتركتان في ⌒ب أ ء

∴ ق(⌒ب أ ء) = 2 ق(∠جـ) = 130°

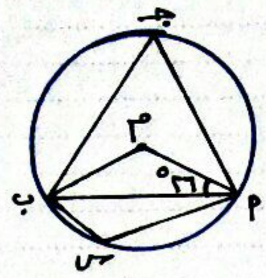
∴ ق(⌒ب جـ ء) = $360 - 130 = 230^\circ$

∵ ∠ب أ ء محيطية تقابل ⌒ب جـ ء

∴ ق(∠ب أ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ب جـ ء) = #

= $\frac{1}{2} \times 230 = 115^\circ$

مثال ③ ق(∠م أ ب) = 26°



أوجد بالبرهان

① ق(∠أ م ب) ② ق(∠أ جـ ب)

③ ق(∠أ س ب) ④ ق(⌒أ س ب)

البرهان ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠م أ ب) = ق(∠م ب أ) = 26°

∴ ق(∠أ م ب) = $180 - (26^\circ + 26^\circ) = 128^\circ$ #①

∴ ق(∠أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أ م ب) = 64°

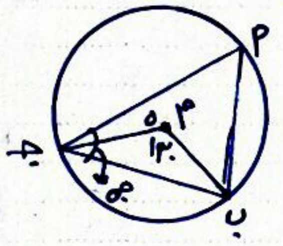
محيطية ومركزية مشتركتان في ⌒أ س ب

∴ ق(∠أ م ب) = ق(⌒أ س ب) = 128°

∴ ق(⌒أ جـ ب) = $360 - 128 = 232^\circ$

∴ ق(∠أ س ب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أ جـ ب) = 116°

مثال ④ ق(∠ب م جـ) = 130°،



ق(∠أ جـ ب) = 50°

أوجد ق(∠أ ب جـ).

البرهان ∵ ∠أ محيطية،

∠ب م جـ مركزية قياسها = 130

ومشتركتان في ⌒ب جـ

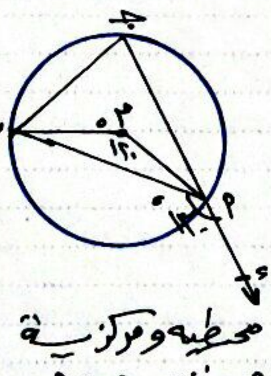
∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م جـ) = 65°

في Δ أ ب جـ

ق(∠أ ب جـ) = $180 - (65^\circ + 50^\circ)$.

= $180 - 115 = 65^\circ$ #

مثال ⑤ ق(∠ب أ ء) = 130°،



ق(∠أ م ب) = 120° أوجد

ق(∠م ب جـ) **الحل**

في Δ م أ ب ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠م ب أ) = $\frac{180 - 120}{2} = 30^\circ$

∴ ق(∠جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أ م ب) = 60° محيطية ومركزية مشتركتان في ⌒أ ب

∵ ∠ب أ ء خارجة عن Δ أ جـ ب

∴ ق(∠أ ب جـ) = $130 - 60 = 70^\circ$

∴ ق(∠م ب جـ) = $70 - 30 = 40^\circ$

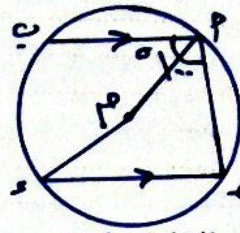
#

مثال ٦

ق(∠ب أ جـ) = ١٠٠°

أب // جـ د ، م مركز

ق(∠أ م د)



البرهان ∵ أب // جـ د

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠° بالتداخل

∴ ق(∠أ م د) = ٢ق(∠جـ) = ٨٠ × ٢ = ١٦٠°

لأنهم محيطية ومركزية مشتركتان في أد

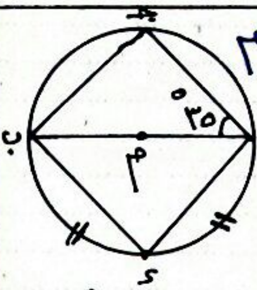
مثال ٧

أب قطر في الدائرة م

طول (أد) = طول (ب د)

ق(∠جـ أ ب) = ٣٥°

أوجد بالبرهان ق(∠جـ ب د)



البرهان ∵ أب قطر ∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° قائمة

لأنها محيطية مرسومة على القطر

∴ ق(∠أ ب جـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٥°) = ٥٥°

∴ ق(أد) = ق(د ب) = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

∴ ق(∠أ ب د) = $\frac{١}{٢}$ ق(أد) = ٤٥°

لأنها محيطية تقابل أد تساوي نصفه

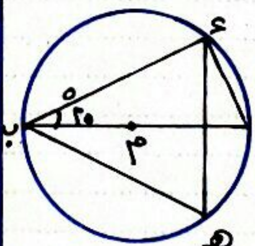
∴ ق(∠جـ ب د) = ٥٥° + ٤٥° = ١٠٠° #

مثال ٨

أب قطر في الدائرة م

ق(∠أ ب د) = ٢٥°

أوجد ق(∠د هـ ب) بالخطوات



البرهان ∵ أب قطر

∴ ق(∠أ د ب) = ٩٠° محيطية مرسومة على القطر

∴ ق(∠د أ ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

∴ ق(∠د أ ب) = ق(∠د هـ ب) = ٦٥°

محيطيتان مرسومتان على نفس القوس د ب

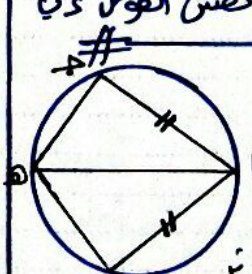
#

مثال ٩

أب = أجـ

اثبت أن

ق(∠أ هـ ب) = ق(∠أ هـ جـ)



البرهان ∵ أب = أجـ وترين

∴ ق(أب) = ق(أجـ) قوس = قوس

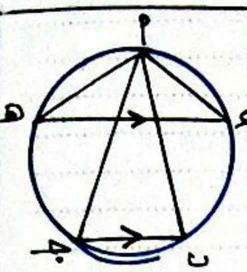
∴ ق(∠أ هـ ب) = ق(∠أ هـ جـ) #

لأنهم محيطيتان تقابلان أقواساً متساوية #

مثال ١٠

د هـ // ب جـ

إثبت أن ق(∠د أ جـ) = ق(∠ب أ هـ)



البرهان ∵ د هـ // ب جـ

∴ ق(د ب) = ق(هـ جـ)

∴ ق(∠د أ ب) = ق(∠هـ أ جـ) محيطيتان على أقواس متساوية

بإضافة ق(∠ب أ جـ) للطرفين

∴ ق(∠د أ جـ) = ق(∠هـ أ ب) #

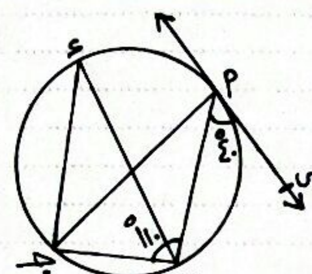
مثال ١١

أس مماس ،

ق(∠س أ ب) = ٤٠° ،

ق(∠أ ب جـ) = ١١٠°

أوجد ق(∠جـ د ب)



البرهان ∵ ق(∠ب جـ أ) = ق(∠س أ ب) = ٤٠°

محيطية ومماسية مشتركتان في أب

في △ أ ب جـ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠ − (١١٠ + ٤٠)

= ٣٠°

∴ ق(∠ب د جـ) = ق(∠ب أ جـ) = ٣٠°

محيطيتان مرسومتان على نفس القوس ب جـ

مثال ١٢

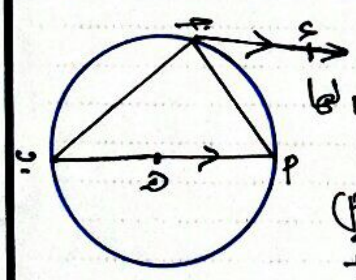
أب قطر في دائرة

محيطها ٤٤ سم ، جـ د مماس لها

عند جـ ، جـ د // ب أ

أوجد مع البرهان (١) ق(∠د جـ أ)

(٢) طول أجـ



البرهان ∵ جـ د مماس // أب قطر

∴ ق(أجـ) = ق(جـ ب) = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

∴ ق(∠د جـ أ) المماسية = $\frac{١}{٢}$ ق(أجـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٩٠ = ٤٥°

(١) #

ق(أجـ) = ٩٠°

∴ طول أجـ = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق (المحيط)

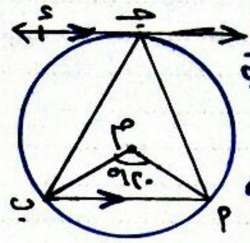
= $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٤٤ = ١١ سم

فكر: $\sqrt{٦ + \sqrt{٦ + \sqrt{٦ + \sqrt{٦ + ٣}}}}$ = ...

01002097866

أ/ وليد محمد عكاشة

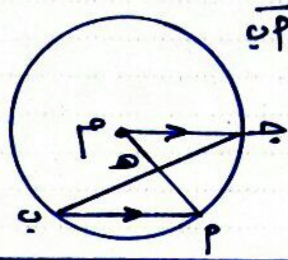
(تمارين)



① جـ د مماس ، جـ د // أ ب

ق(∠أ م ب) = 120°

أثبت أن △ جـ أ ب متساوي الأضلاع

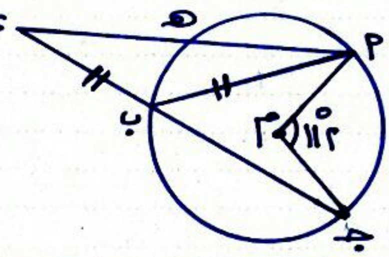


② أ ب وتر فيه جـ م // أ ب

، ب جـ ∩ أ م = {هـ}

أثبت أن

ب هـ > أ هـ



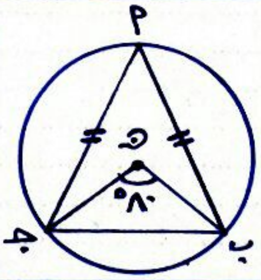
③ دائرة م

ق(∠أ م جـ) = 112°

، أ ب = د ب ،

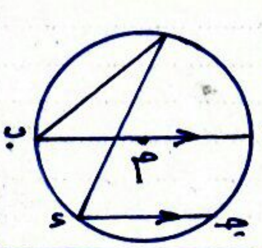
ب ∈ د جـ

أوجد ق(∠د)



④ أوجد ① ق(∠أ ب جـ)

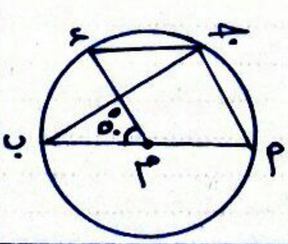
② ق(⌒ب جـ) الأكبر



⑤ أ ب قطر في الدائرة م

أ ب // جـ د ، ق(⌒جـ د) = 80°

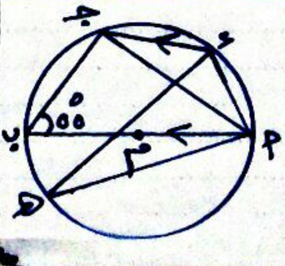
أوجد ق(∠هـ)



⑥ أ ب قطر في الدائرة م

ق(∠ب م د) = 50°

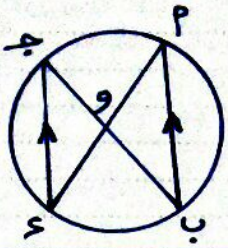
أوجد ق(∠أ جـ د)



⑦ أ ب قطر ، د جـ // أ ب

ق(∠أ ب جـ) = 55°

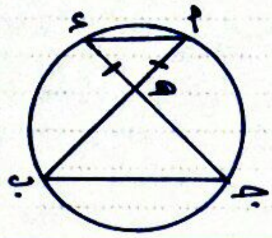
أوجد ق(∠أ هـ د)



⑧ أ ب ، جـ د وتران متوازيان في الدائرة ،

أ د ∩ جـ ب = {و}

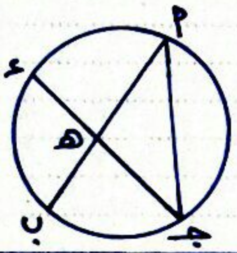
أثبت أن أ و = و ب



⑨ أ ب ∩ جـ د = {هـ} ،

هـ أ = هـ د أثبت أن

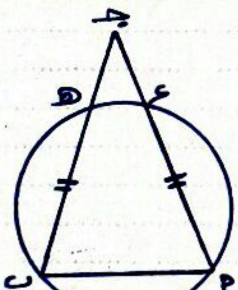
هـ ب = هـ جـ



⑩ أ ب = جـ د ،

أ ب ∩ جـ د = {هـ}

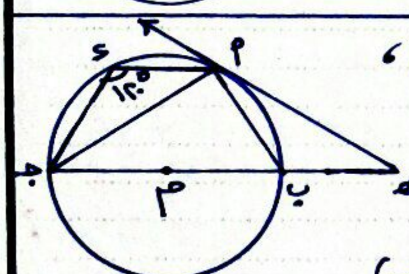
أثبت أن △ أ جـ هـ متساوي الساقين



⑪ أ د = ب هـ ،

أ د ∩ ب هـ = {جـ}

أثبت أن جـ د = جـ هـ



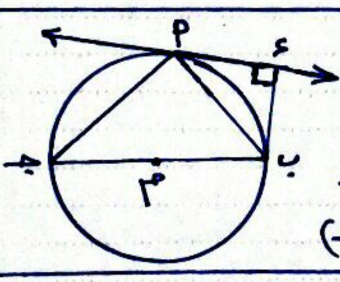
⑫ هـ أ مماس للدائرة م ،

ق(∠أ د جـ) = 120°

أثبت أن

① ب أ = ب هـ

② ق(∠أ ب هـ) = ق(∠هـ أ جـ)

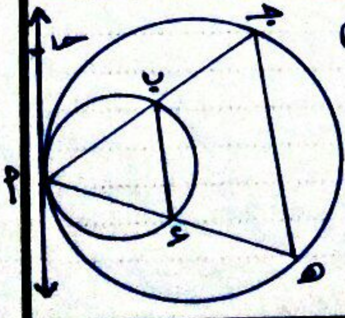


⑬ أ د مماس للدائرة م

عند أ ، ب جـ قطر ،

ب د ⊥ أ د أثبت أن

ق(∠أ ب د) = ق(∠أ جـ ب)



⑭ دائرتان متماستان من الداخل

في أ ، أ س مماس مشترك

أثبت أن

د ب // هـ جـ

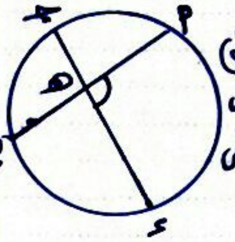
أ/ وليد محمد عكاشة

01002097866

٣ تمارين مشهورة

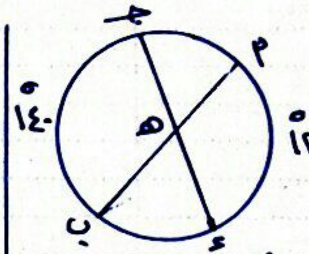
تمرين مشهور ①

> إذا تقاطع وتران في نقطة داخل دائرة، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لها.



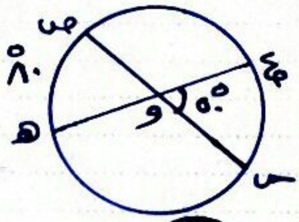
⇐ ق(هـ^) = ½ ق(أ ء) + ½ ق(جـ ب)

⇐ قياس القوس المطلوب = ضعف الزاوية − القوس المعطى



ق(هـ^) = ...

ق(هـ^) = ٦٠ + ٧٠ = ١٣٠°

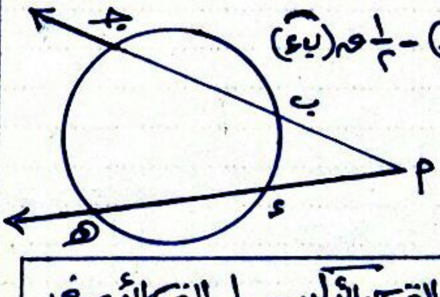


ق(س ع) = ...

ق(س ع) = ١٠٠ − ٨٠ = ٢٠°

تمرين مشهور ②

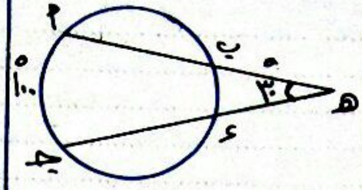
> إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين في دائرة خارجها، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف قياس القوس الأكبر مطروحاً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.



ق(أ^) = ½ ق(جـ هـ) − ½ ق(ب ء)

قياس الزاوية = ½ القوس الأكبر − ½ القوس الأصغر
الأكبر = ضعف الزاوية + القوس الأصغر
القوس الأصغر = القوس الأكبر − ضعف قياس الزاوية

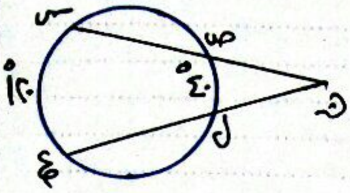
⇐ إذا كان $3^{س} = 5$ فإن $3^{س+1} = ...$



ق(ب ء) = ...

= الأكبر − ضعف الزاوية

= ١٠٠ − ٦٠ = ٤٠°



ق(هـ^) = ...

الزاوية = ½ الأكبر − ½ الأصغر

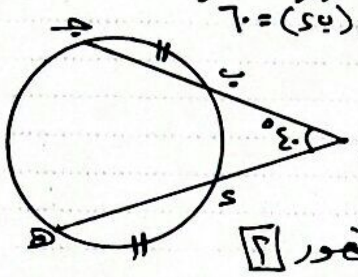
= ٦٠ − ٢٠ = ٤٠°

مثال ①

ق(أ^) = ٤٠°، ق(ب ء) = ٦٠°، ق(ب جـ) = ق(ء هـ)

أوجد ① ق(هـ جـ)

② ق(ب جـ)



البرهان من التمرين المشهور ②

ق(جـ هـ) الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

= ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠° # ①

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

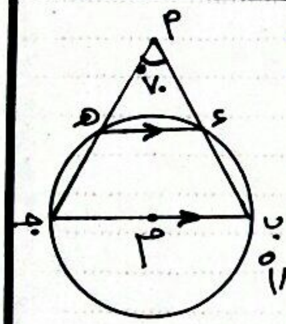
∴ ق(ب جـ) = $\frac{٣٦٠ − (١٤٠ + ٦٠)}{٢}$ = ٨٠° # ②

مثال ②

جـب قطر في الدائرة م

، ق(أ^) = ٧٠°، ء هـ // ب جـ

أوجد ق(ب ء)



البرهان ∵ ب جـ قطر

∴ ق(ب جـ) الأكبر نصف دائرة = ١٨٠°

من التمرين المشهور ②

ق(ء هـ) الأصغر = الأكبر − ضعف الزاوية

= ١٨٠ − ١٤٠ = ٤٠°

∵ ق(ب ء جـ) نصف دائرة = ١٨٠°

∵ ء هـ // ب جـ ∴ ق(ء ب) = ق(هـ جـ)

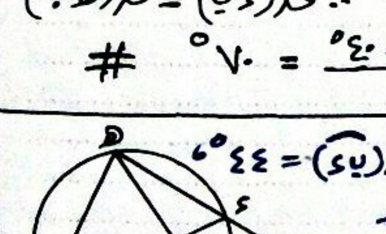
∴ ق(ب ء) = $\frac{١٨٠ − ٤٠}{٢}$ = ٧٠° #

مثال ③

ق(أ^) = ٣٠°، ق(ب ء) = ٤٤°، ق(ء جـ هـ) = ٤٨° أوجد

① ق(جـ هـ)

② ق(ب جـ)



البرهان من التمرين المشهور ②

∵ ق(جـ هـ) = ضعف ق(أ^) + ق(ء ب) الأصغر

= ٦٠ + ٤٤ = ١٠٤° # ①

∵ ق(ءجـه^) محيطية تقابل القوس ءه

∴ ق(ءه⌒) = ٢ × ٤٨ = ٩٦°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

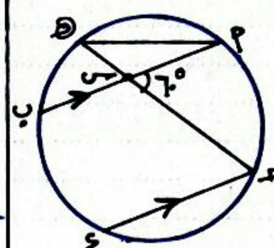
∴ ق(بجـ⌒) = ٣٦٠° − (٩٦° + ١٠٤° + ٤٤°)

= ١١٦° #

مثال ٤ أب // جـء ، ق(أسجـ^) = ٦٠° ،

ق(أجـ⌒) = ٨٠°

أوجد بالبرهان



① ق(أهجـ^) ② ق(بء⌒) ③ ق(به⌒)

البرهان ∵ ق(أهجـ^) = ½ ق(أجـ⌒)

= ٤٠° محيطية تقابل أجـ # ①

∵ أب // جـء ∴ ق(أجـ⌒) = ق(بء⌒)

= ٨٠° # ②

من التمرين المشهور الأول

ق(هب⌒) = ٢ق(أسجـ^) − ق(أجـ⌒)

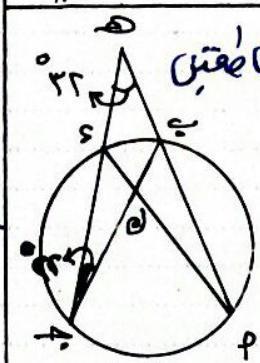
= ١٢٠° − ٨٠° = ٤٠° # ③

مثال ٥ أء ، بجـ وتران متقاطعان

بحيث ق(جـ^) = ٢٢° ،

ق(هـ^) = ٣٢° أوجد

ق(أمجـ^)



البرهان

∵ ق(بجـء^) = ½ ق(بء⌒) محيطية

∴ ق(بء⌒) = ٢ × ٢٢ = ٤٤°

من التمرين المشهور ②

ق(أجـ⌒) = ٢ × ٣٢ + ق(بء⌒)

= ٦٤ + ٤٤ = ١٠٨°

من التمرين المشهور ①

ق(أمجـ^) = ½ ق(بء⌒) + ½ ق(أجـ⌒)

= ٢٢ + ٥٤ = $\boxed{76}$ #

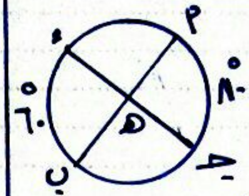
فكر

جا٣٠ / ٤ = ...

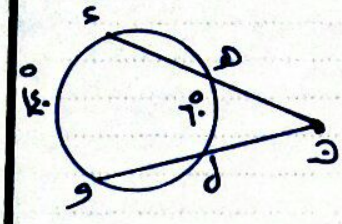
(تمارين)

(على التمارين المشهورة)

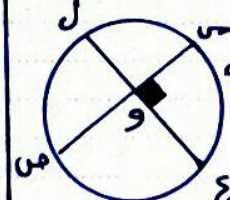
① أكمل ما يأتي



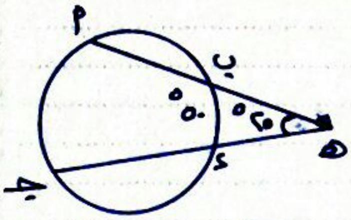
ق(أهجـ^) = ...



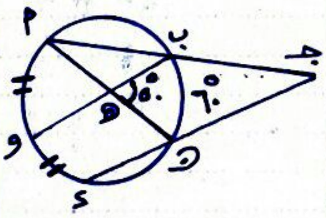
ق(ن^) = ...



ق(لصع⌒) = ...



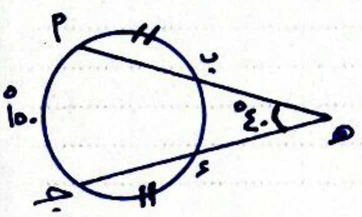
ق(أجـ⌒) = ...



ق(أبو^) = ...

ق(أنء^) = ...

ق(جـ^) = ...

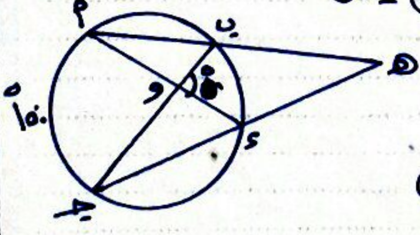


ق(بء⌒) = ...

ق(أب⌒) = ...

مثال ② ق(بوء^) = ٥٠°

ق(أجـ⌒) = ١٥٠° ،

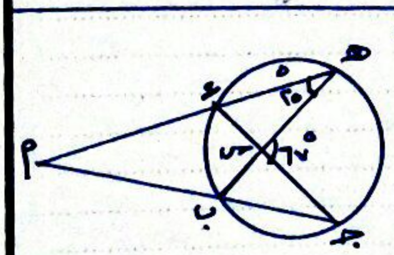


① أوجد ق(بء⌒)

② أوجد ق(بأء^)

③ أوجد ق(هـ^)

مثال ③ ق(هـ^) = ٢٥°



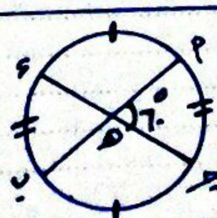
ق(هسجـ^) = ٦٧°

اثبت أن

ق(أبه^) = ق(أءجـ^)

= ١٣٨°

مثال ④ ق(أجـ⌒) = ق(ءب⌒)



ق(أء⌒) = ق(جـب⌒) ،

ق(أهجـ^) = ٦٠°

أوجد ق(أء⌒)

الدرس الرابع

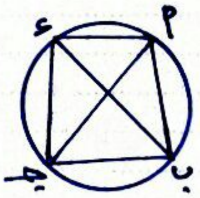
[الشكل الرباعي الدائري]

هو شكل رباعي جميع رؤوسه تقع على دائرة واحدة

⇐ المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوي الساقين أشكال رباعية دائرية بينما متوازي الأضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوي الساقين ليست أشكالاً رباعية دائرية

خواص الشكل الرباعي الدائري

[1] كل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها تكونان متساويتان في القياس



مثال

ق(أ ب̂ د) = ق(أ جـ̂ د)

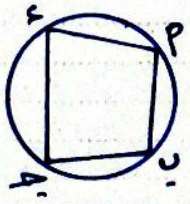
مرسومتان على القاعدة أ د

وأيضاً : ق(ب أ̂ جـ) = ق(ب د̂ جـ)

مرسومتان على القاعدة ب جـ وهكذا

⇐ الزاويتان المرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهتين مختلفتين منها متكاملتان

[2] كل زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموع قياسهم 180°)

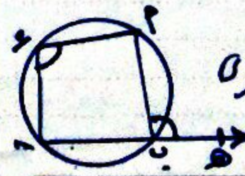


أ ب جـ د رباعي دائري

فإن ق(أ̂) + ق(جـ̂) = 180°

ق(ب̂) + ق(د̂) = 180°

[3] قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس الرباعي الدائري تساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



∠ أ ب هـ خارجة عن الرباعي الدائري

∴ ق(أ ب̂ هـ) = ق(د̂)

متى يكون الشكل الرباعي دائرياً :-

لإثبات أن الشكل الرباعي دائري يجب أن نثبت إحدى الخواص الآتية :

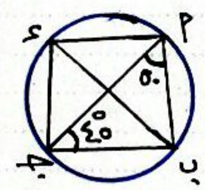
[1] إذا وجدت نقطة في مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

[2] إذا وجدت زاويتان متساويتان في القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفي جهة واحدة من هذه القاعدة

[3] إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموعهم = 180°)

[4] إذا وجدت زاوية خارجة عند أي رأس من رؤوسه قياسها يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

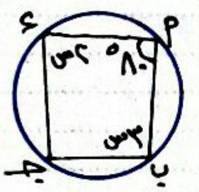
أ ب جـ د شكل رباعي دائري



ق(ب د̂ جـ) = ...°

ق(ب د̂ هـ) = ...°

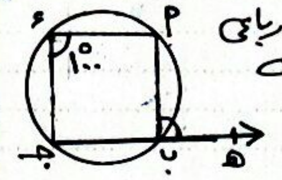
أ ب جـ د رباعي دائري



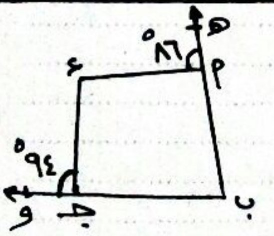
ق(هـ̂) = ...°

س = ...°

أ ب جـ د رباعي دائري



ق(أ ب̂ هـ) = ...



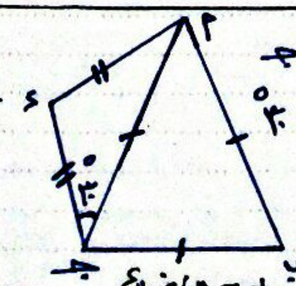
إثبت أن أ ب جـ د رباعي دائري

مثال [1] أ ب = ب جـ = أ جـ

، أ د = د جـ ، ق(أ جـ̂ د) = 30°

إثبت أن

أ ب جـ د رباعي دائري



البرهان :- ∵ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع

∴ ق(ب̂) = 60°

في Δ أ د جـ المتساوي الساقين

ق(د أ̂ جـ) = ق(أ جـ̂ د) = 30° ∴ ق(د̂) = $180 - 60 = 120^\circ$

∴ ق(ب̂) + ق(د̂) = $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ متقابلتان متكاملتان

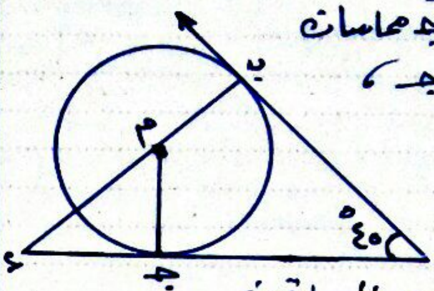
∴ أ ب جـ د رباعي دائري #

مثال ② $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ ، ق(∠أ) = ٤٥°

إثبت أن :

① أ ب م جـ رباعي دائري

② ∆ م جـ ء متساوي الساقين



البرهان ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، $\overline{مب}$ نصف القطر

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس ، $\overline{مجـ}$ نصف القطر

∴ ق(∠أ جـ م) = ٩٠°

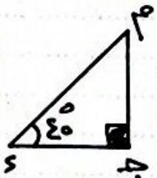
∵ ق(∠أ ب م) + ق(∠أ جـ م) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب م جـ رباعي دائري # ①

في ∆ أ ب ء ق(∠ء) = ١٨٠° − (٤٥° + ٩٠°)

= ١٨٠ − ١٣٥ = ٤٥°



في ∆ م جـ ء

ق(∠جـ م ء) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

∴ ق(∠جـ م ء) = ق(∠جـ ء م) = ٤٥°

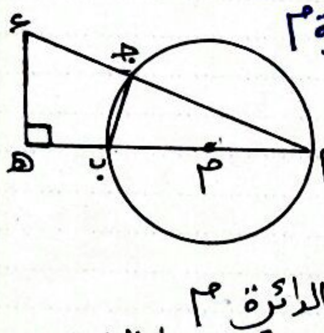
∴ ∆ م جـ ء متساوي الساقين

مثال ③ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

$\overleftrightarrow{ءهـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$

إثبت أن :

الشكل ب هـ ء جـ رباعي دائري



البرهان ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

∵ ب جـ ⊥ أ ء

∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠هـ) وهي خارجة عن الشكل جـ ب هـ ء ، ∠هـ مقابلة للمجاورة لها

∴ جـ ب هـ ء رباعي دائري

مثال ④ أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م

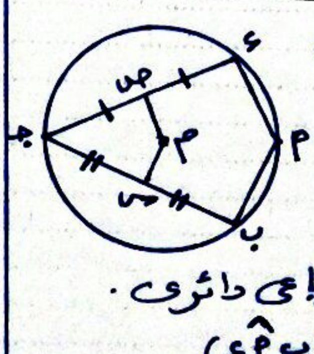
، س منتصف $\overline{بجـ}$

، ص منتصف $\overline{جـء}$

إثبت أن

① الشكل م س جـ ص رباعي دائري.

② ق(∠س م ص) = ق(∠ب أ ء)



البرهان ∵ س منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ ق(∠س) = ٩٠°

∵ ص منتصف $\overline{ءجـ}$ ∴ ق(∠ص) = ٩٠°

∵ ق(∠ص) + ق(∠س) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

متقابلتان متكاملتان

∴ م س جـ ص رباعي دائري # ①

∴ ق(∠ص م س) + ق(∠جـ) = ١٨٠° ← ①

∵ ء أ ب جـ رباعي دائري

∴ ق(∠ب أ ء) + ق(∠جـ) = ١٨٠° ← ②

من ① ، ② ينتج أن

ق(∠ص م س) = ق(∠ب أ ء) # ②

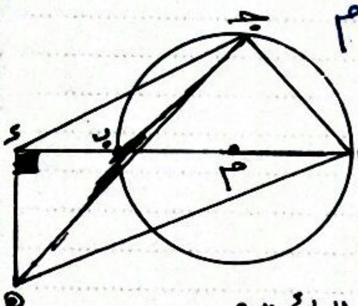
مثال ⑤ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

، رسم $\overleftrightarrow{ءهـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ،

$\overleftrightarrow{جـب} \cap \overleftrightarrow{ءهـ} = \{هـ\}$

إثبت أن

أ جـ ء هـ شكل رباعي دائري



البرهان ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∵ ∠أ جـ ب محيطية مرسومة في نصف دائرة

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ جـ هـ) = ق(∠أ ء هـ) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أهـ}$

∴ أ جـ ء هـ رباعي دائري #

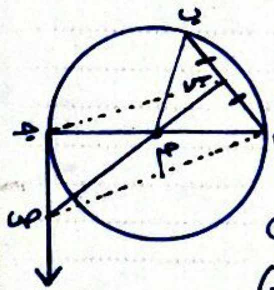
مثال ⑥ $\overline{أجـ}$ في الدائرة م ،

س منتصف $\overline{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـص}$ مماس للدائرة قطع $\overrightarrow{سم}$ في ص

إثبت أنه

① الشكل أ س جـ ص رباعي دائري

② ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠م ص جـ)



البرهان ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق(∠س) = ٩٠°

∵ $\overline{أجـ}$ قطر ، $\overleftrightarrow{جـص}$ مماس عند جـ

∴ ق(∠جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠أ جـ ص) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أص}$

∴ أ س جـ ص رباعي دائري # ①

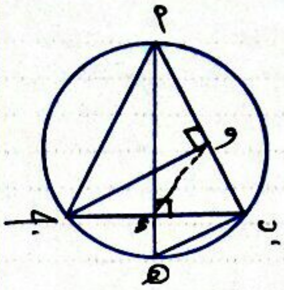
∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠ب أ جـ) ← ②

مركزية ومحيطية مرسومتان على ب جـ

∵ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠م ص جـ) ← ③ مرسومتان على قاعدة واحدة

من ② ، ③ ∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠م ص جـ) # ②

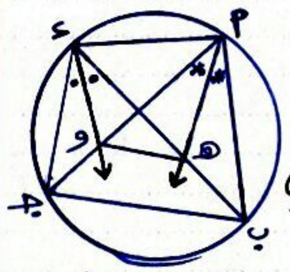
مثال ٧ $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$ ،
$\overleftrightarrow{جـ و} \perp \overleftrightarrow{أ ب}$ إثبت أن



① الشكل أ و د جـ رباعي دائري
② ق(∠هـ ب جـ) = ق(∠د و جـ)

البرهان
∵ $\overleftrightarrow{جـ و} \perp \overleftrightarrow{أ ب}$ ، ∵ $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$
∴ ق(∠أ و جـ) = ق(∠أ د جـ) = ٩٠°
وهما مرسومتان على القاعدة أ جـ
∴ الشكل أ و د جـ رباعي دائري # ①
ينتج من الرباعي الدائري أن
~~ق(∠ب أ هـ) = ق(∠و د جـ) ← ①~~
∴ ق(∠د و جـ) = ق(∠د أ جـ) مرسومتان مع
قاعدة واحدة د جـ ← ①
∴ ق(∠هـ ب جـ) = ق(∠هـ أ جـ) ← ②
محيطيتان مرسومتان على نفس القوس هـ جـ
من ① ، ② ينتج أن
ق(∠هـ ب جـ) = ق(∠د و جـ) # ②

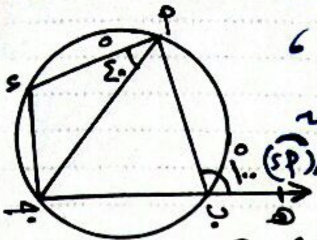
مثال ٨ أ ب جـ د رباعي دائري



$\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ب أ جـ ،
$\overrightarrow{د و}$ ينصف ∠ب د جـ
إثبت أن ① أ هـ و د رباعي دائري
② $\overline{هـ و}$ // $\overline{ب جـ}$

البرهان ∵ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب د جـ) محيطيتان
مرسومتان على قاعدة واحدة
∴ ½ ق(∠ب أ جـ) = ½ ق(∠ب د جـ)
∴ ق(∠هـ أ و) = ق(∠هـ د و) وهما مرسومتان
على القاعدة هـ و
∴ أ هـ و د شكل رباعي دائري # ①
من الشكل الرباعي الدائري أ هـ و د نستنتج أن
ق(∠د هـ و) = ق(∠و أ د) مرسومتان مع القاعدة
و د ← ①
∵ ق(∠جـ ب د) = ق(∠جـ أ د) ← ②
محيطيتان مرسومتان على نفس القوس جـ د
من ① ، ② ينتج أن
ق(∠جـ ب د) = ق(∠د هـ و) وهما في وضع
تناظر
∴ $\overline{هـ و}$ // $\overline{ب جـ}$ # ②

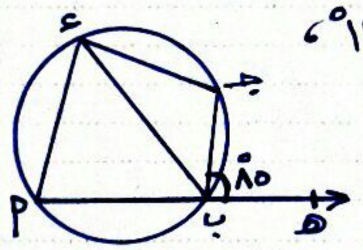
مثال ٩ ق(∠أ ب هـ) = ١٠٠° ،



ق(∠جـ أ د) = ٤٠° أوجد
~~ق(∠ب ...)~~ ق(⌒جـ د) = ق(⌒أ د)

البرهان ∵ أ ب جـ د رباعي دائري
∵ ∠أ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب جـ د
∴ ق(∠أ ب هـ) = ق(∠د) = ١٠٠°
في Δ أ د جـ ق(∠أ جـ د) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٤٠°)
∴ ق(∠أ جـ د) = ٤٠°
∴ ق(∠د أ جـ) = ق(∠أ جـ د) = ٤٠°
∴ Δ أ د جـ متساوي الساقين
∴ أ د = د جـ وتر = وتر
∴ ق(⌒أ د) = ق(⌒د جـ) قوس = قوس
#

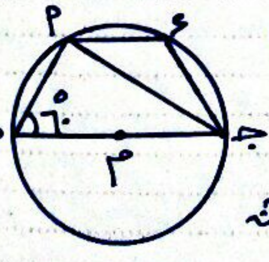
مثال ١٠ ق(⌒أ ب) = ١١٠° ،



ق(∠جـ ب هـ) = ٨٥°
أوجد : ق(∠ب د جـ)

البرهان
∵ ∠جـ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري
جـ ب أ د ∴ ق(∠جـ ب هـ) = ق(∠جـ د أ) = ٨٥°
∵ ق(⌒أ ب) = ١١٠° ∴ ق(∠ب د أ) المحيطية = ½ ق(⌒أ ب)
∴ ق(∠ب د أ) = ٥٥°
∴ ق(∠ب د جـ) = ٨٥° − ٥٥° = ٣٠° #

مثال ١١ أ ب جـ د رباعي دائري



$\overline{جـ ب}$ قطر في الدائرة م ،
ق(∠أ ب جـ) = ٦٠° ،
طول ⌒أ د = طول ⌒جـ د إثبت أن
$\overrightarrow{جـ أ}$ ينصف ∠د جـ ب

البرهان ∵ $\overline{جـ ب}$ قطر في الدائرة م
∴ ق(∠جـ أ ب) = ٩٠° قائمة محيطية مرسومة في
نصف دائرة

∵ ق(أد⌢) = ق(جـد⌢)

∴ أد = جـد ∴ △ دجـأ متساوي الساقين

∵ أدجـب رباعي دائري

∴ ق($\hat{د}$) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠° (متقابلتان متكاملتان)

في △ دجـأ ق(د $\hat{جـ}$ أ) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$ = ٣٠°

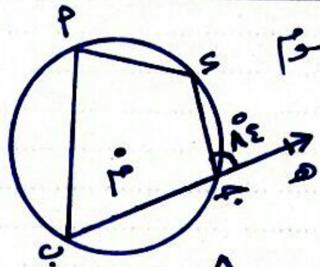
في △ أجـب ∴ ق(أ $\hat{جـ}$ ب) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°)

∴ ق(أ $\hat{جـ}$ ب) = ٣٠°

∴ ق(د $\hat{جـ}$ أ) = ق(أ $\hat{جـ}$ ب) = ٣٠°

∴ $\overrightarrow{جـأ}$ ينصف ∠ دجـب #

مثال (١٢) أبجـد رباعي مرسوم داخل دائرة م



ق(د $\hat{جـ}$ هـ) = ٨٤°

ق($\hat{ب}$) = $\frac{١}{٢}$ ق($\hat{د}$)

أوجد ① ق($\hat{أ}$) ② ق($\hat{ب}$)

البرهان ∵ ∠ دجـهـ خارجية عن الشكل الرباعي أبجـد

∴ ق(د $\hat{جـ}$ هـ) = ق($\hat{أ}$) = ٨٤° # ①

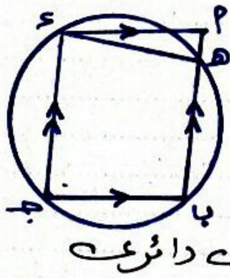
∵ أبجـد ∴ ق($\hat{ب}$) + ق($\hat{د}$) = ١٨٠°

∵ ق($\hat{ب}$) = $\frac{١}{٢}$ ق($\hat{د}$)

∴ ق($\hat{ب}$) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°

∴ ق($\hat{ب}$) = ٦٠° # ②

مثال (١٣) أبجـد متوازي أضلاع



إثبت أن

$\boxed{\text{أد = هـد}}$

البرهان ∵ دهـبجـ رباعي دائري

∴ ق(أ $\hat{هـ}$ د) = ق($\hat{جـ}$) ⟵ ①

خارجية عن الرباعي الدائري هـبجـد

∵ أبجـد متوازي أضلاع

∴ ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{جـ}$) ⟵ ②

من ① ، ② ينتج أن

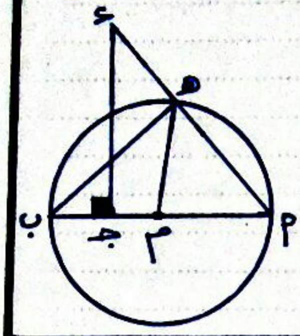
ق(أ $\hat{هـ}$ د) = ق($\hat{أ}$)

∴ △ دأهـ متساوي الساقين ∴ $\boxed{\text{أد = هـد}}$

#

تمارين على الشكل الرباعي الدائري

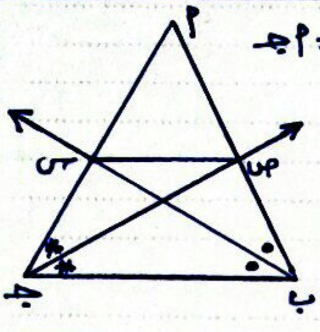
1 أب قطر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{جـد}$ ⊥ أب إثبت أن



① النقط د، هـ، جـ، ب يمر بها دائرة واحدة

② ق(أ $\hat{م}$ هـ) = ٢ق($\hat{د}$)

2 أبجـ مثلث فيه أب = أجـ



$\overrightarrow{بس}$ ينصف ∠ب ،

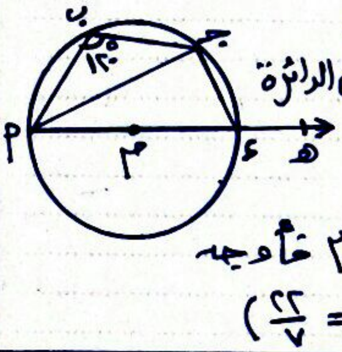
$\overrightarrow{جـص}$ ينصف ∠جـ ،

إثبت أن

① ب جـ س ص رباعي دائري

② $\overleftrightarrow{سص}$ // $\overleftrightarrow{بجـ}$

3 أبجـد رباعي دائري

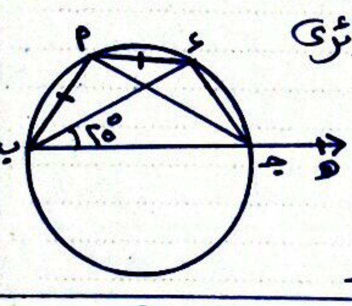


ق($\hat{ب}$) = ١٢٠° ، أد قطر في الدائرة

① أوجد ق(جـ $\hat{د}$ هـ) ،
ق(جـ $\hat{أ}$ د)

② إذا كان : دجـ = $٢\sqrt{٧}$ فأوجد
طول أد⌢ حيث ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

4 أبجـد شكل رباعي دائري



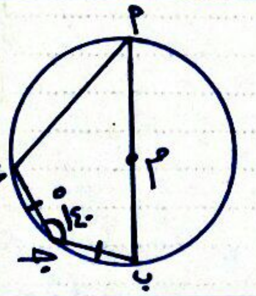
فيه أب = أد

ق(هـ $\hat{ب}$ د) = ٢٥°

ق(هـ $\hat{جـ}$ د) = ١٣٠°

إثبت أن أد = دجـ

5 أبجـد رباعي دائري ،

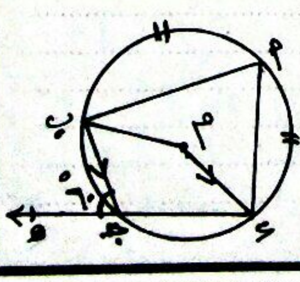


جـب = جـد ،

ق(ب $\hat{جـ}$ د) = ١٤٠°

أوجد ① ق($\hat{أ}$) ② ق($\hat{د}$)

6 ق(ب $\hat{جـ}$ هـ) = ٦٠° ،



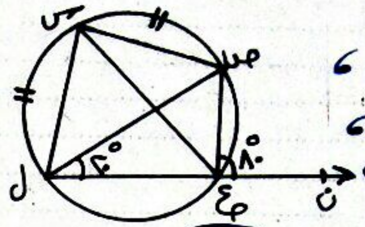
$\overline{بجـ}$ // $\overline{مد}$ ،

أ منتصف بد⌢ الأكبر

إثبت أن ① بمدجـ معين

② أجـ قطر في الدائرة .

مثال (١٢)



س منتصف $\overset{\frown}{\text{صل}}$ ،
ق(ص $\hat{\text{ع}}$ ن) = ٨٠° ،
ق(ص $\hat{\text{ل}}$ ع) = ٢٠° ،
أوجد ق(ع $\hat{\text{س}}$ ل) ، ق($\overset{\frown}{\text{س ص ع}}$)

مثال (١٣) $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{ب أ}}$ وتر فيها ، ء ∈ $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$ بحيث ق(أ $\hat{\text{ء}}$ جـ) = ١١٨° ، رسم $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$ ويقطع الدائرة فى هـ

① أوجد ق(أ $\hat{\text{ب}}$ جـ)

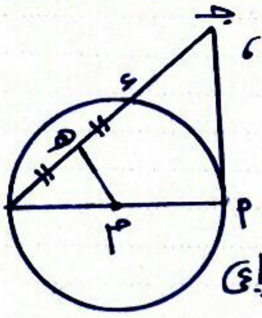
② إثبت أن ق(أ $\hat{\text{جـ}}$ ء) = ق(جـ $\hat{\text{ب}}$ هـ)

مثال (١٤) أ ب جـ مثلث حاد الزوايا مرسوم داخل دائرة ، رسم $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ليقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ عند ء ويقطع الدائرة عند هـ ، رسم $\overrightarrow{\text{جـ و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ليقطع $\overline{\text{أ ب}}$ عند و

اثبت أن ① الشكل أ و ء جـ رباعى دائرى

② ق(ب $\hat{\text{و}}$ ء) = ق(ب $\hat{\text{هـ}}$ ء)

مثال (١٥)

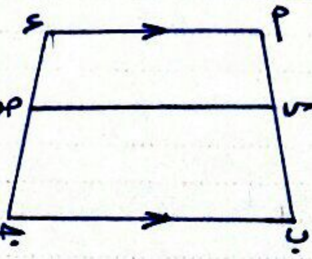


$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماس لها عند م ، هـ منتصف $\overline{\text{ء ب}}$ ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ٤٠°

① إثبت أن: الشكل أ م هـ جـ رباعى دائرى

② أوجد ق($\hat{\text{جـ}}$)

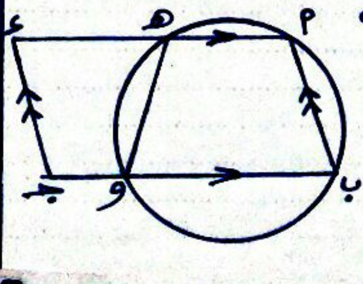
مثال (١٦)



أ ب جـ ء شكل رباعى فيه $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، فإذا كان الشكل أ س ص ء رباعى دائرى

إثبت أن الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى.

مثال (١٧)



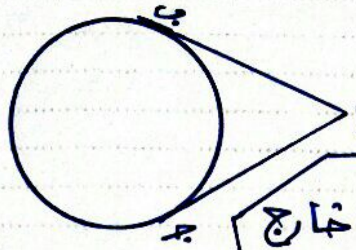
أ ب جـ ء متوازى أضلاع

إثبت أن الشكل جـ ء هـ و رباعى دائرى.

الدرس الخامس :-

[العلاقة بين مماسات الدائرة]

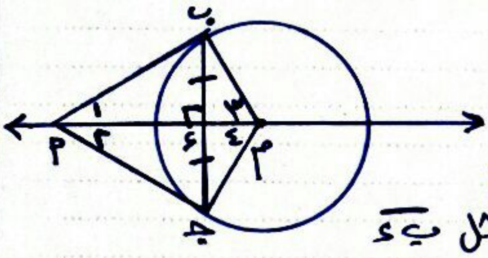
نظرية (٤)



القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول.

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطعتان مماسيتان مرسومتان من أ ∴ $\boxed{\text{أ ب = أ جـ}}$

نتائج هامة



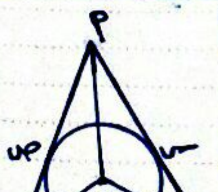
$\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\boxed{\text{ب ء = ء جـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ محور تماثل ب ء

① المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محوراً لوتر التماس لهذين المماسين

② المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس.

ق($\hat{1}$) = ق($\hat{2}$) ، ق($\hat{3}$) = ق($\hat{4}$)



مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية.

لاحظ أن

$\boxed{\text{أ س = أ ص}}$ قطعتان مماسيتان مرسومتان من أ

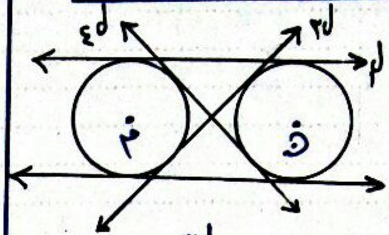
$\boxed{\text{ب س = ب ع}}$ قطعتان مماسيتان مرسومتان من ب

$\boxed{\text{جـ ع = جـ ص}}$ قطعتان مماسيتان مرسومتان من جـ

[الرياضيات غذاء العقل]

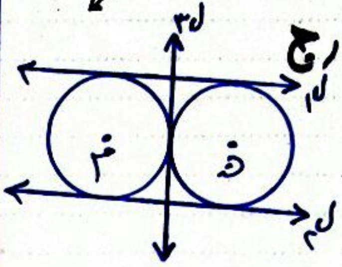
* عدد المماسات المشتركة لدائرتين :-

١ متباعدتان



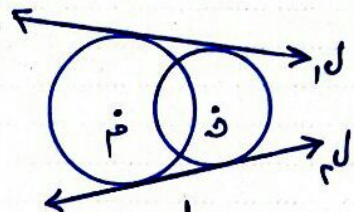
٤ مماسات مشتركة

٢ متماستان من الخارج



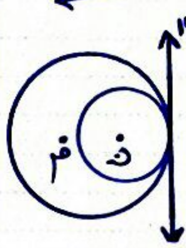
٣ مماسات مشتركة

٣ متقاطعتان



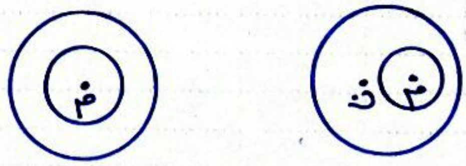
٢ مماسان مشتركان

٤ متماستان من الداخل



١ مماس واحد

٥ متداخلتان ، متحدتي المركز

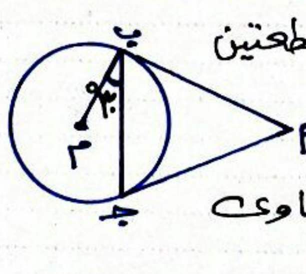


عدد المماسات المشتركة = صفر

مثال ١

أب ، أجـ قطعتين مماستين للدائرة م ، ق(م ب̂ جـ) = ٣٠°

إثبت أن Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع



البرهان

∵ أب مماس ، م ب نصف قطر

∴ ق(أ ب̂ م) = ٩٠°

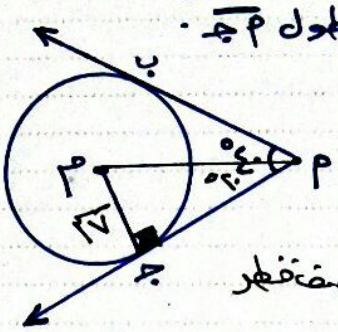
∴ ق(أ ب̂ جـ) = ٩٠° - ٣٠° = ٦٠°

∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان مرسومتان من أ ∴ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع #

أي مثلث متساوي الساقين فيه زاوية قياسها ٦٠° يكون مثلث متساوي الأضلاع

مثال ٢

أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ، ق(أ̂) = ٤٠° ، إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٧√٣ أوجد لأقرب سنتيمتر: طول أجـ.



البرهان برسم م أ

ينصف ∠أ

∴ ق(م أ̂ جـ) = ٢٠°

∵ أجـ مماس ، م جـ نصف قطر

∴ ق(جـ̂) = ٩٠°

ظا(م أ̂ جـ) = م جـ / أ جـ

ظا٢٠ / ١ = ٧ / أ جـ   أ جـ = ٧ × ١ / ظا٢٠ ≃ ١٩

مثال ٣

سأ ، سب مماسان للدائرة عند أ ، ب

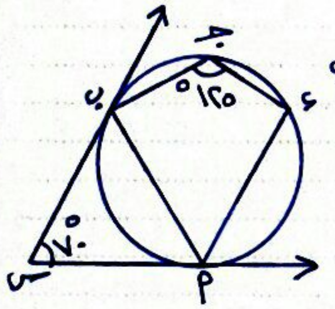
ق(أ س̂ ب) = ٧٠° ،

ق(ء جـ̂ ب) = ١٢٥° ،

إثبت أن

١) أب ينصف ∠ء أ س

٢) أء // سب



البرهان

∵ أ ء جـ ب رباعي دائري

∴ ق(أ̂) = ١٨٠° - ١٢٥° = ٥٥° (متقابلتان متكاملتان)

∵ سأ ، سب قطعتان مماستان مرسومتان من س

∴ سأ = سب

∴ Δ س أ ب متساوي الساقين

∴ ق(س أ̂ ب) = (١٨٠ - ٧٠) / ٢ = ٥٥°

∴ ق(س أ̂ ب) = ق(ء أ̂ ب) = ٥٥°

∴ أب ينصف ∠ء أ س # ①

∴ ق(ء أ̂ س) = ٥٥° + ٥٥° = ١١٠°

∵ ق(ء أ̂ س) + ق(س̂) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠° وهما في وضع تداخل

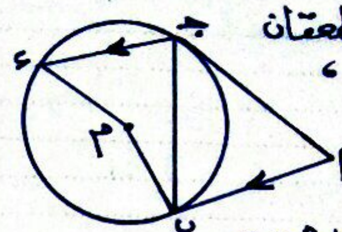
∴ أء // سب # ②

الاعتذار عن الخطأ لا يجرح كرامتك بل يجعلك كبيراً بعين من أخطأت بحقه

01002097866

أ/ وليد محمد عكاشة

مثال ٤ $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مماسيتان للدائرة م ،
$\overline{أب} \parallel \overline{جد}$ ،
ق(∠ب م د) = ١٣٠°



١ إثبت أن: $\overrightarrow{جب}$ ينصف ∠ أ جـ د
٢ أوجد: ق(∠أ)

البرهان ق(∠ب جـ د) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م د) = ٦٥° محيطية ومركزية مشتركتان في القوس ب د

∵ $\overline{جد} \parallel \overline{أب}$

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠ب جـ د) = ٦٥° بالتبادل

∵ أب = أجـ قطعتان مماسيتان

∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين

∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠أ ب جـ) = ٦٥°

∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠ب جـ د) = ٦٥°

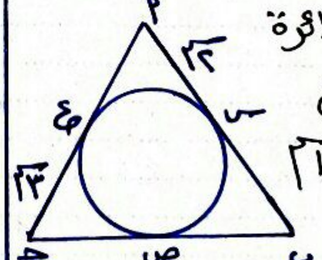
∴ $\overrightarrow{جب}$ ينصف ∠ أ جـ د # ١

في △ أ ب جـ

ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°)

= ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° # ٢

مثال ٥ △ أ ب جـ يمس الدائرة من الخارج في س ، ص ، ع ، فإذا كان محيط △ أ ب جـ = ١٨ سم ، أ س = ٢ سم ، جـ ع = ٣ سم
احسب طول $\overline{ب ص}$



البرهان ∵ أ س = أ ع قطعتان مماسيتان

∴ أ س = أ ع = ٢ سم

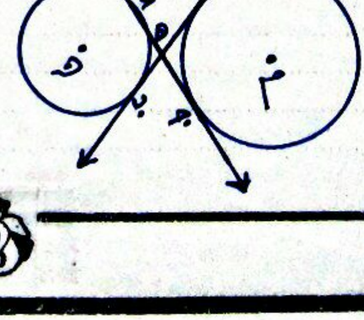
∵ جـ ص = جـ ع قطعتان مماسيتان مرسومتان من جـ

جـ ص = جـ ع = ٣ سم

∵ محيط △ أ ب جـ = ١٨ سم

∴ ب ص = $\frac{١٨ - (٤ + ٦)}{٢} = \frac{١٨ - ١٠}{٢}$ = ٤ سم #

مثال ٦ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جد}$ مماسان للدائرتين م ، ن
إثبت أن
$\boxed{أب = جد}$



في الدائرة م هـ أ ، هـ جـ مماستان من عند هـ

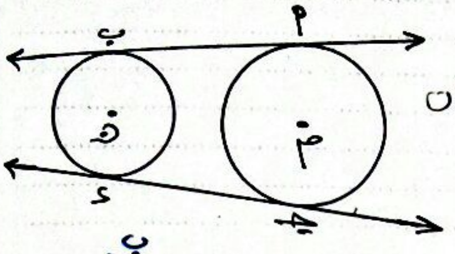
∴ هـ أ = هـ جـ ← ١

في الدائرة ن هـ د ، هـ ب مماستان من عنده

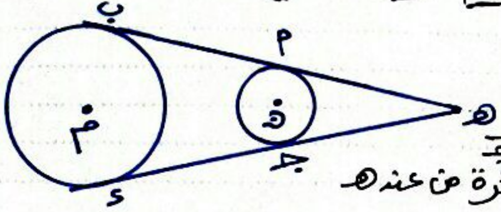
∴ هـ د = هـ ب ← ٢

بجمع ١ ، ٢ ∴ أب = جـ د #

مثال ٧



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جد}$ مماسان
إثبت أن
$\boxed{أب = جد}$



البرهان

∵ $\overline{هـ أ}$ ، $\overline{هـ جـ}$ مماسان للدائرة من عند هـ

∴ هـ أ = هـ جـ ← ١

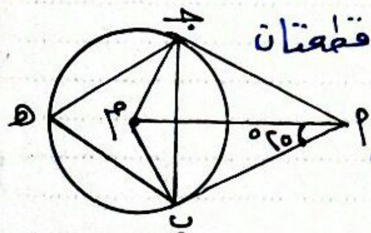
∵ $\overline{هـ ب}$ ، $\overline{هـ د}$ مماسان للدائرة من عند هـ

∴ هـ ب = هـ د ← ٢ بطرح ١ من ٢

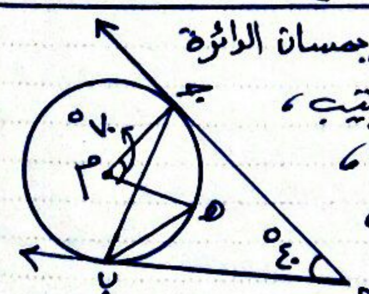
∴ أ ب = جـ د #

تمارين
على المماسات في الدائرة

مثال ١ $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مماستان للدائرة م ،
ق(∠ب أ م) = ٢٥° ،
هـ ∈ $\overset{\frown}{ب جـ}$ الأكبر
أوجد ١ ق(∠م جـ ب)
٢ ق(∠ب هـ جـ)



مثال ٢ $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أج}$ يمسان الدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ،
ق(∠ب أ جـ) = ٤٠° ،
ق(∠هـ م جـ) = ٧٠° ،
إثبت أن
$\overrightarrow{ب هـ}$ ينصف ∠ أ ب جـ

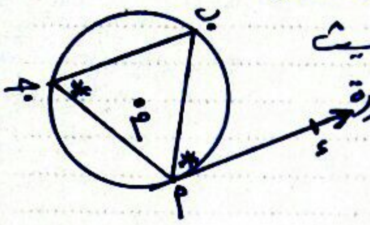


[I Like Mathematics]

الدرس السادس

عكس نظرية الزاوية المماسية

إذا رُسم شعاع من إحدى نقطتي النهاية لوتر في دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماساً للدائرة .

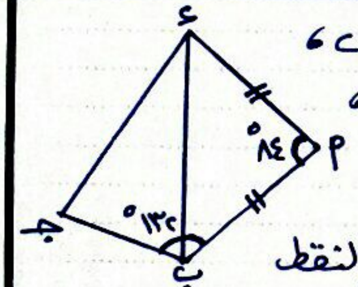


أي أن إذا كانت ق(جـ^) = ق(ب أ^ ء)

فإنه نستنتج أن أء→ مماس للدائرة م عند أ

مثال ① أ ب جـ ء شكل رباعي ، أ ب = أ ء ، ق(أ^) = ٨٤° ، ق(أ ب^ جـ) = ١٣٢°

إثبت أن ب جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء



البرهان في Δ أ ب ء ∵ أ ب = أ ء

∵ ق(أ^) = ٨٤°

∴ ق(أ ب^ ء) = $\frac{١٨٠° - ٨٤°}{٢}$ = ٤٨°

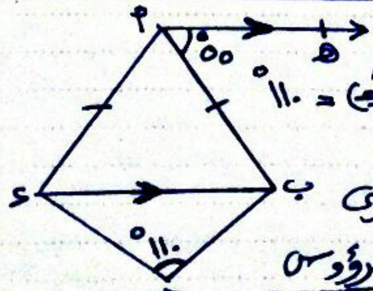
∴ ق(ء ب^ جـ) = ١٣٢° − ٤٨° = ٨٤°

∴ ق(ب أ^ ء) = ق(ء ب^ جـ) = ٨٤°

وهما مشتركان في الوتر ء ب

∴ ب جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

مثال ② أهـ→ // ء ب→ ، ق(ب أ^ هـ) = ٥٥° ، ق(جـ^) = ١١٠° ، أ ب = أ ء إثبت أن



① الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

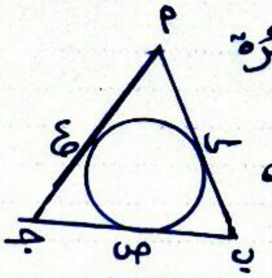
② أهـ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب جـ ء

البرهان

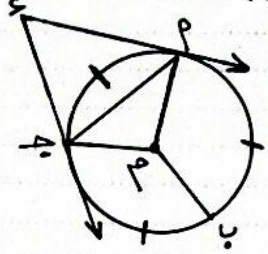
∵ أ ب = أ جـ ∵ أهـ // ب ء

∴ ق(هـ أ ب) = ق(أ ب^ ء) = ٥٥° بالتبادل

مثال ③ Δ أ ب جـ يمس الدائرة من الخارج في س ، ص ، ع ، أ س = ٥√٣ ، ب ص = ٣√٣ ، جـ ع = ٤√٣ إحسب محيط Δ أ ب جـ



مثال ④ الدائرة م إنقسمت إلى ثلاثة أقواس متساوية في الطول أ ب ، ب جـ ، جـ أ يمسانها ... ء



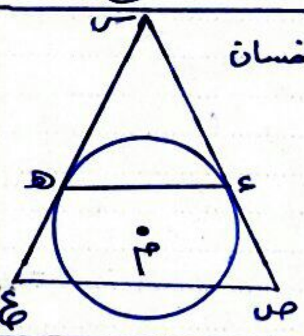
① أوجد ق(أ م^ ب)

② إثبت أن :

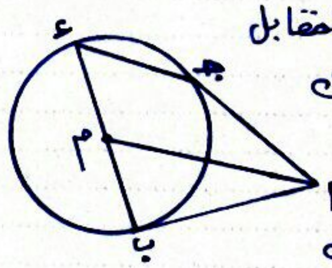
أولاً: الشكل أ م جـ ء رباعي دائري

ثانياً: Δ أ جـ ء متساوي الأضلاع

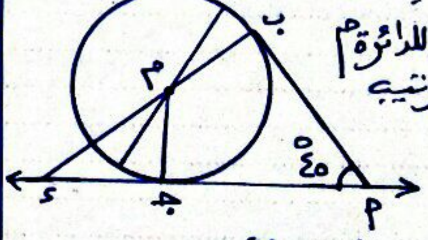
مثال ⑤ س ص ، س ع مماسان للدائرة م عند ء ، هـ ، فإذا كان ء هـ // ص ع فأثبت أن الشكل ء ص ع هـ رباعي دائري



مثال ⑥ في الشكل المقابل أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م ، ب ء قطر في الدائرة إثبت أن أ م // ء جـ



مثال ⑦ أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ق(أ^) = ٤٥° ، إثبت أن



① الشكل أ ب م جـ رباعي دائري

② أ ء = م ب + م ب

سبحان الله وبحمده ∴ سبحان الله العظيم

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠م ء ب) = ٥٥°

في Δ أ ب ء ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − (٥٥° + ٥٥°)

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

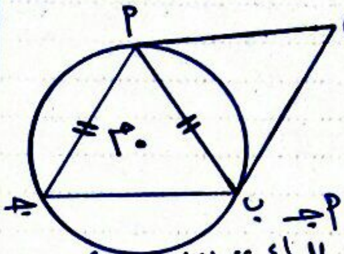
∵ في الشكل الرباعي أ ب جـ ء

∴ ق(∠ب أ ء) + ق(∠جـ) = ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°

وهما متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

مثال ٣



ء أ ، ء ب قطعتان مماستان للدائرة م عند أ ، ب حيث أ ب = أ جـ

إثبت أن أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

البرهان في Δ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) ← (١)

∵ ء أ ، ء ب قطعتان مماستان مرسومتان من ء ∴ ء أ = ء ب

∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء ب أ) ← (٢)

∵ ق(∠ب جـ أ) = ق(∠ء أ ب)

محيطية ومماسية مرسومتان على نفس القوس أ ب

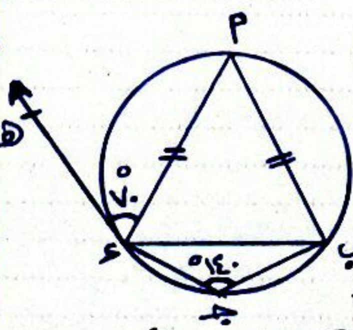
∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء ب أ) = ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب)

ومن خواص المثلث

∴ ق(∠ب ء أ) = ق(∠ب أ جـ)

∴ أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

مثال ٤



أ ب = أ ء ، ق(∠جـ) = ١٤٠° ، ق(∠أ ء هـ) = ٧٠°

إثبت أن ء هـ مماس للدائرة عند ء

البرهان ∵ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

∵ أ ب = أ ء ∴ Δ أ ب ء متساوي الساقين

∴ ق(∠أ ب ء) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = ٧٠°

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء هـ)

مرسومتان على قاعدة واحدة أ ء

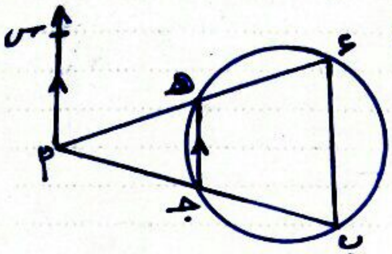
∴ ء هـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء عند ء

(تمارين)

(١) أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ جـ = ب جـ

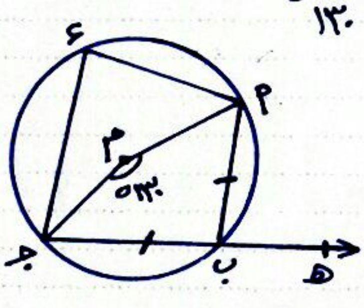
إثبت أن: جـ ء مماس للدائرة الخارجية للمثلث أ ب جـ

(٢) الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري ، أ س // جـ هـ



برهن أن أ س مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

(٣) ق(∠أ م جـ) = ١٣٠° ، أ ب = ب جـ

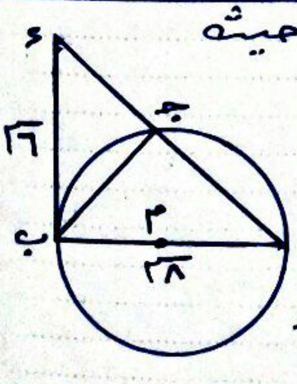


فأوجد كلاً من: ق(∠ء) ، ق(∠أ ب هـ)

ثم إثبت أن: جـ هـ يمس الدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، م

(٤) أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، أ ء ينصف ∠ب أ جـ ويقطع ب جـ في ء والدائرة في هـ إثبت أن: ب هـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

(٥) أ ب قطر في الدائرة م حيث أ ب = ٨ سم ، أ جـ وتر فيها ، رسم ب ء مماساً للدائرة يقطع أ جـ في ء فإذا كان: ب ء = ٦ سم



(١) إثبت أن: أ ب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ جـ ب ء

(٢) أوجد: طول ب جـ